Grado: Ingeniería en Tecnologías Industriales
Asignatura: MATEMÁTICAS III
Curso: 2011-2012 (Grupo 30)

Problema 1

a) Resolver la ecuación $e^{2i\cosh(z)} - 2ie^{i\cosh(z)} + 1 = 0$.

b) Resolver la ecuación $\log_{\frac{\pi}{2}}(z) + \log_{\frac{3\pi}{2}} z = -i$ en el abierto

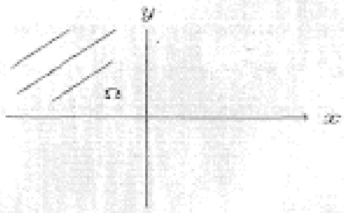

Figura 11

Problema 2
Hallar los autovalores del problema de contorno siguiente

$$\begin{cases} y'' - 2y' + \lambda y = 0, & x \in [0, a] \\ y(0) = y'(0) \\ y'(a) = 0 \end{cases}$$

Problema 3
Resolver la ecuación $4y''' + 4y' = \tan(x)$.

Problema 4
Resolver, utilizando la transformación de Laplace, el problema

$$\begin{cases} y' + 4y + 5\int_0^x y\, ds = e^{-x} & x \geq 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Problema 5
Utilizando la teoría de puntos singulares-regulares hallar un sistema fundamental de soluciones en $]0, \infty[$ de la ecuación diferencial

$$x^2 y'' + (x^2 - x)y' + y = 0.$$

Problema 6
Hallar un sistema fundamental de soluciones de la ecuación

$$y'' + \frac{e^{2/x} - \upsilon^2}{x^4} y = 0 \quad (0 < x < \infty)$$

(Sugerencia: Utilizar primero la transformación $y = zx$ y después el cambio de variable $e^{1/x} = t$)

Problema 7
Hallar la solución general de la ecuación diferencial

$$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0, \quad x \in (-1, 1),$$

$(n = 1, 2, \ldots)$ efectuando el cambio de variable $x = \cos(t)$.

Problema 8

Dada la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & -4 \end{pmatrix}$

a) Probar que $\operatorname{Im}\{\log_\pi \mathbf{A}\} = \pi \mathrm{I}_3$.

b) Resolver el problema de valores iniciales $\begin{cases} y'(x) = \mathbf{A} y(x) \\ y(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases}$.

Problema 9

Hallar una matriz $\mathbf{X} \in \mathbf{M}_2(\mathbb{C})$ verificando $\mathbf{X}^{10^6} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Problema 10

Hallar una matriz fundamental del sistema diferencial lineal

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \frac{x-1}{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad 0 < x < \infty.$$

(Sugerencia: Resolver primero la ecuación diferencial equivalente utilizando la teoría de puntos singulares-regulares.)

Problema 11

Resolver el siguiente problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cosh(t)} & \tanh(t) \\ -\tanh(t) & \frac{1}{\cosh(t)} \end{pmatrix} x, \quad t \in (-\infty, \infty) \\ x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Problema 12

Resolver el problema de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{1}{t} \mathbf{A}^{\frac{1}{6}} x, \quad 0 < t < \infty \\ x(1) = x_0 \end{cases}$$

con $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -128 & 384 & -192 \\ 0 & 64 & 0 \\ 192 & -384 & 256 \end{pmatrix}$, $\quad x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, utilizando el cambio de variable $t = e^s$.

Grado: Ingeniería en Tecnologías Industriales
Asignatura: MATEMÁTICAS III
Curso: 2011-2012 (Grupo 26)

Problema 1

a) Hallar $\log_{\frac{\pi}{3}}(1-i)$.

b) Hallar $\lim_{x\to-\infty} \arg_0 z_k$ siendo $\{z_k : k \in \mathbb{Z}\}$ el conjunto de las soluciones de la ecuación $\cosh(z + i\frac{\pi}{2}) = a$, ($a$ es una constante > 0) que están en el semiplano de la izquierda.

Problema 2
Hallar los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ para los cuales el problema de contorno para soluciones $\not\equiv 0$

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 \le x \le 1 \\ y(0) = 0 \\ 3y(1) + y'(1) = 0. \end{cases}$$

Problema 3
Hallar la solución general de la ecuación $y'' + 4y = \sin(x)\sin(2x)$.

Problema 4
Resolver, utilizando la transformación de Laplace, el problema

$$\begin{cases} y'(t) = \sin(t) + \int_0^t y(t-u)\cos(u)\,du \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Problema 5
Hallar un sistema fundamental de soluciones de la ecuación diferencial

$$x^2y'' + (x^2 - x)y' + y = 0$$

en el intervalo $]0,\infty[$ utilizando la teoría de puntos singulares-regulares.

Problema 6
Hallar la solución general de la ecuación diferencial

$$xy'' + y' + mxy = 0, \quad 0 < x < \infty,$$

utilizando el cambio de variable $t = \sqrt{m}x$ (m es una constante > 0.)

Problema 7
Resolver el siguiente problema de contorno

$$\begin{cases} x^4y'' + 2x^3y' - y = 0, & 0 < x < \infty \\ y(0+) = 0, \; y(1) = -2 \end{cases}$$

(Sugerencia: utilizar el cambio de variable $x = \frac{1}{t}$.)

Problema 8

Consideremos la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Hallar las matrices $\mathbf{A}^n$ y $\mathbf{B} = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathbf{A}^n}{n^2}$.

b) Resolver el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \mathbf{B}x + b(t) \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

siendo $\mathbf{B}$ la matriz calculado en el apartado **a)**, $b(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}^t$ y $x_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^t$.

Problema 9
Resolver el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Problema 10

Resolver el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-m^2}{1-t^2} & \frac{t}{1-t^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad 0 \le t < 1, \\ \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

utilizando el cambio de variable $t = \cos(u)$. (Nota: m es un parámetro real $\neq 0$.)

Problema 11

Hallar la matriz fundamental del sistema $\frac{dy}{dx} = \begin{pmatrix} \cos(x) & 0 \\ 1-\sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix} y$ que en $x = \frac{\pi}{2}$ se reduce a la identidad.

Problema 12

Resolver el problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = t^r \mathbf{A} x, \quad 0 < t < \infty \\ x(1) = e_1, \end{cases}$$

siendo r un número < -1, $\mathbf{A}$ la matriz $\begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{e}_1$ el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(Sugerencia: Hacer el cambio de variable $s = \frac{t^{r+1}}{r+1}$).