DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

E.T.S.I. Industriales
Examen de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (30-6-2011)
$2^{\underline{a}}$ parte: Problemas. Duración: 2 horas

P–1 Hallar los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ para los cuales existen soluciones $\not\equiv 0$ del problema

$$\begin{cases} y'' + \frac{\lambda}{x-1} y' = 0 \ , & 1 < x < \infty \ , \\ y(1+) = 0 \ , & \\ y'(+\infty) = 0 \ . & \end{cases}$$

(Sug.: Utilizar el cambio de variable $x - 1 = t$.)

P–2 Resolver la ecuación diferencial

$$y'' + \frac{1-2i}{x} y' - \frac{1}{x^2} y = 0 \ , \qquad 0 < x < \infty \ ,$$

utilizando la teoría de ecuaciones diferenciales con puntos singulares regulares.

P–3 Resolver el problema de Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} x & 1 \\ 0 & 1 + \operatorname{sen} x \end{pmatrix} y(x) + \begin{pmatrix} e^{\cos x} \\ 0 \end{pmatrix} \ , & -\infty < x < \infty \ , \\ y(\pi) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ . & \end{cases}$$

Nota. Cada problema se entregará por separado y ocupará un máximo de (3; 3; 4) hojas (por una cara). **No se corregirán hojas adicionales.** Puntuación: (7; 6; 7).

(P1) Hallar $\lambda \in \mathbb{R}$ / $\exists$ sol. de $\begin{cases} y'' + \dfrac{\lambda}{x-1} y' = 0 & 1 < x < +\infty \\ y(1^+) = 0 \\ y'(+\infty) = 0 \end{cases}$

(Sug: usar el cambio $x-1=t$)

$$\begin{tikzcd} x \in (1,+\infty) \arrow[r, "t=x-1"] \arrow[d, "y"'] & t \in (0,+\infty) \arrow[dl, "z"] \\ \mathbb{R} & \end{tikzcd} \Rightarrow \begin{cases} y(x) = z(t(x)) \\ y'(x) = z'(t(x))\cdot t'(x) = z'(t(x)) \\ y''(x) = z''(t(x))(t'(x))^2 + z'(t(x))\cdot \underbrace{t''(x)}_{0} \\ \quad = z''(t(x)). \end{cases}$$

$\Rightarrow$ sustituimos en la eq: $z''(t(x)) + \dfrac{\lambda}{t} z'(t(x)) = 0 \Rightarrow$ (hacemos el cambio)

$\Rightarrow \begin{cases} z'' + \dfrac{\lambda}{t} z' = 0, & 0 < t < +\infty \\ z(0^+) = 0 \\ z'(+\infty) = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow t^2 z'' + \lambda t z' = 0$ eq. Euler $\Rightarrow$

$\Rightarrow \rho(\rho-1) + \lambda\rho = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \rho(\rho + (\lambda - 1)) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ si $\boxed{\lambda = 1} \Rightarrow \rho = 0$ (doble) $\Rightarrow z(t) = A + \log t\, B \Rightarrow z(t) = A \Rightarrow \boxed{y(x) = A}$ (cte)

$0 = z(0^+) \Rightarrow B = 0$; $\lim_{t\to 0^+} \log(t) = -\infty$; $z'(t) = \dfrac{B}{t}$

si $\boxed{\lambda < 1} \Rightarrow \rho = 0, \rho = 1-\lambda \Rightarrow z(t) = A + B x^{1-\lambda}$

$0 = z(0^+) = A$

$0 = z(+\infty) \Rightarrow B = 0.$ $\Big\} \Rightarrow$ sol. trivial.

$\lim_{t\to+\infty} x^{1-\lambda} = +\infty$ ($1-\lambda > 0$)

si $\boxed{\lambda > 1} \Rightarrow \rho = 0, \rho = 1-\lambda \Rightarrow z(t) = A + B t^{1-\lambda} \Rightarrow z(t) = A \Rightarrow \boxed{y(x) = A}$ (cte)

$0 = z(0^+) \Rightarrow B = 0$; $\lim_{t\to 0^+} t^{1-\lambda} = \lim_{t\to 0^+} \dfrac{1}{t^{\lambda-1}} = +\infty$ ($1-\lambda < 0$) ; $z'(t) = (1-\lambda) t^{-\lambda} \cdot B$

En consecuencia, si $\boxed{\lambda \geq 1} \Rightarrow \boxed{y(x) = A \text{ (cte)}, \ 1 < x < +\infty}$

si $\lambda \leq 1 \Rightarrow y(x) \equiv 0$

P.2 $y'' + \frac{1-2i}{x} y' - \frac{1}{x^2} y = 0 \quad 0 < x < +\infty$ usando PSR

Consideremos la ecuación auxiliar en $\mathbb{C}$.

Euler

$$\omega'' + \frac{(1-2i)}{z}\omega' - \frac{1}{z^2}\omega = 0 \Rightarrow z^2\omega'' + (1-2i)z\omega' - 1\cdot\omega = 0$$

como $z_0 = 0$ punto singular y $a(z) = 1-2i$, $b(z) = -1 \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$

$\Rightarrow z_0 = 0$ PSR en $D(0,+\infty) = \mathbb{C}$.

Polinomio radical: $q(\rho) = \rho(\rho-1) + (1-2i)\rho - 1 = 0 \Rightarrow \rho = i$ (doble)

$\Rightarrow \boxed{\rho_1 = \rho_2}$ Caso 2 sea $c_0 \overset{(1)}{\neq} 0$, $d_0 = 0$, la ec. auxiliar admite

el SFS: $\{ \omega_1(z) = z^i \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n, \ \omega_2(z) = \omega_1(z)\log_0(z) + z^i \sum_{n=0}^{+\infty} d_n z^n \}$

en $D(0,+\infty) \setminus]-\infty, 0[$ donde $z^i = e^{i \log_0 z}$.

- $\omega_1(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^{n+i} \Rightarrow \omega_1'(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+i) c_n z^{n+i-1} \Rightarrow \omega_1''(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+i)(n+i-1) c_n z^{n-\dots}$

$\Rightarrow z^2 \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} (n+i)(n+i-1) c_n z^{n+i-2} + (1+2i) z \sum_{n=0}^{+\infty} (n+i) c_n z^{n+i-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^{n+i} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} (n+i)(n+i-1) c_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (1+2i)(n+i) c_n z^n - \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = 0 \Rightarrow$

Dividimos por z^i

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \left[(n+i)(n+i-1)c_n + (1+2i)(n+i)c_n - c_n \right] z^n = 0 \overset{PCA}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow \boxed{c_n = \frac{0}{(n+i)(n+i-1) + (1+2i)(n+i) - 1}} \ \forall n \geq 1 \Rightarrow \boxed{\omega_1(z) = z^i}$

$\boxed{c_0 = 1}$

Por Euler, como $\rho = i$ (doble) $\Rightarrow$ SFS $= \{ x^i, \log(x)\cdot x^i \}$, $x > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{y(x) = A x^i + B \log(x)\cdot x^i}$ sol. gral.

Vamos bien!!!

comprobación que hago yo, no necesaria si todo va bien

$\circ\ \omega_2(z) = \omega_1(z)\log_0 z + \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} d_n z^{n+i}\right)}_{=\sigma} \Rightarrow \omega_2'(z) = \omega_1'(z)\log_0 z + \omega_1(z)\cdot\frac{1}{z} + \sigma' \Rightarrow$

$\Rightarrow \omega_2''(z) = \omega_1''(z)\log_0 z + 2\omega_1'(z)\cdot\frac{1}{z} - \omega_1(z)\cdot\frac{1}{z^2} + \sigma'' \Rightarrow$ (sustituimos en la ecuación) $\Rightarrow \log_0 z\left(z^2\omega_1''(z) + (1-2i)z\omega_1'(z) - \omega(z)\right) + 2\omega_1'(z)\cdot z - \omega_1(z) + z^2\sigma'' +$

$+(1-2i)\omega_1(z) + (1-2i)z\sigma' - \sigma = 0 \Rightarrow$ 0 pq $\omega_1(z)$ es sol. de la eq.

$\Rightarrow 2i z^{i-1}\cdot z - z^i + z^2\sum_{n=0}^{+\infty}(n+i)(n+i-1)d_n z^{n+i-2} + (1-2i)z^i + (1-2i)z\sum_{n=0}^{+\infty}(n+i)d_n z^{n+i-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} d_n z^{n+i} = 0$

$\Rightarrow \cancel{-(1-2i)z^i} + \sum_{n=0}^{+\infty}(n+i)(n+i-1)d_n z^{n+i} + \cancel{(1-2i)z^i} + \sum_{n=0}^{+\infty}(1-2i)(n+i)d_n z^{n+i} - \sum_{n=0}^{+\infty} d_n z^{n+i} = 0$

$\Rightarrow z^i\cdot\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left[(n+i)(n+i-1)d_n + (1-2i)(n+i)d_n - d_n\right]z^n\right) = 0 \Rightarrow \boxed{d_n = \frac{0}{(n+i)(n+i-1)+(1-2i)(n+i)-1}}$, $n\geq$ … $z^i\neq 0$ PCA $\boxed{d_0 = 0}$

$\Rightarrow \boxed{\omega_2(z) = \omega_1(z)\log_0 z = z^i\cdot\log_0 z}$ Como en Euler, perfecto

Así, $\{z^i, z^i\log_0 z\}$ SFS. de la eq. auxiliar en $D(0,+\infty)\setminus]-\infty,0[\ \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\{x^i, x^i\log x\}\text{ SFS. en }]0,+\infty[}$ pq $W(x^i, x^i\log x) = \begin{vmatrix} x^i & x^i\log x \\ ix^{i-1} & ix^{i-1}\log x + x^i\frac{1}{x}\end{vmatrix} =$

$= i\log x\underbrace{\begin{vmatrix} x^i & x^i \\ x^{i-1} & x^{i-1}\end{vmatrix}}_{0} + \begin{vmatrix} x^i & x^i\log x \\ 0 & x^{i-1}\end{vmatrix} = x^{2i-1} \neq 0$ $x\in(0,+\infty)$

P.3

$$\begin{cases} Y'(x) = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} x & 1 \\ 0 & 1+\operatorname{sen} x \end{pmatrix} Y(x) + \begin{pmatrix} e^{\cos x} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad -\infty < x < +\infty \\ \\ Y(\pi) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\text{sea } B(x) = \int_\pi^x A(t)\,dt = \begin{pmatrix} -\cos t & t \\ 0 & t\cos t \end{pmatrix}\Bigg|_{t=\pi}^{t=x} = \begin{pmatrix} -1-\cos x & x-\pi \\ 0 & x-\cos x-\pi \end{pmatrix}$$

no necesario tomar $t_0=\pi$, pues se complica

$$A = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} x & 1 \\ 0 & 1+\operatorname{sen} x \end{pmatrix}$$

$$\text{sea } B(x) = \int_0^x A(t)\,dt = \begin{pmatrix} -\cos t & t \\ 0 & t-\cos t \end{pmatrix}\Bigg|_{t=0}^{t=x} = \begin{pmatrix} 1-\cos x & x \\ 0 & x+1-\cos x \end{pmatrix}$$

$$A(x)B(x) = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x\cos x & x\operatorname{sen} x + x+1-\cos x \\ 0 & x+1-\cos x + x\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x \cos x \end{pmatrix}$$

$$\|$$

$$B(x)A(x) = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x\cos x & 1-\cos x + x + x\operatorname{sen} x \\ 0 & x+1-\cos x + x\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x \cos x \end{pmatrix}$$

Por ejercicio 77 $\Rightarrow$ $e^{B(x)}$ es matriz fundamental de $Y'(x) = A(x)Y(x)$.

Calculemos $e^{B(x)} = f(1-\cos x)\cdot Z_{10} + f(x+1-\cos x)\, Z_{20}$ (*)

$\sigma(B(x)) = \{1-\cos x,\ x+1-\cos x\}$

$\Delta_{B(x)}(z) = (z-1+\cos x)(z-x-1+\cos x) = m_{B(x)}(z)$

Fórmula Lagrange-Sylvester

sea $f(z) = e^z \in \mathcal{H}(\mathbb{C}) \Rightarrow f \in \mathcal{F}(B(x))$

sea $g_1(z) = (z-1+\cos x) \overset{(*)}{\Rightarrow} (B(x)-(1-\cos x)I_2) = g_1(B(x)) = \underbrace{g_1(1-\cos x)}_{0} Z_{10} + \underbrace{g_2(x+1-\cos x)}_{x} Z_{20}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & x \end{pmatrix} = x\cdot Z_{20} \Rightarrow \boxed{Z_{20} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$g_2(z) = 1 \overset{(*)}{\Rightarrow} I_2 = g_2(B(x)) = \underbrace{g_2(1-\cos x)}_{1} Z_{10} + \underbrace{g_2(x+1-\cos x)}_{1} Z_{20} \Rightarrow$

Así, $\circledast \Rightarrow e^{B(x)} = e^{1-\cos x}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + e^{x+1-\cos x}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{e^{B(x)} = e^{1-\cos x}\begin{pmatrix} 1 & e^{x}-1 \\ 0 & e^{x} \end{pmatrix}}$$ matriz fundamental de $Y'(x) = A(x)Y(x)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ (Fórmula de Lagrange) $\Rightarrow$ sol. del problema de valores iniciales:

$$Y(x) = e^{B(x)}\cdot\left[Y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{-B(t)}\cdot b(t)\,dt\right] \Rightarrow$$

$$e^{B(x)}e^{-B(x)} = e^{0} = I \Rightarrow e^{-B(x)} = \left(e^{B(x)}\right)^{-1}.$$

sea $f(z) = e^{-z} \in \mathcal{H}(\mathbb{C}) \Rightarrow f \in \mathcal{F}(B(x)) \Rightarrow e^{-B(x)} = \underset{f(1-\cos x)}{e^{\cos x-1}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \underset{f(x+1-\cos x)}{e^{\cos x-x-1}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow e^{-B(x)} = e^{\cos x-1}\begin{pmatrix} 1 & e^{-x}-1 \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix}.$$

$b(t) = \begin{pmatrix} e^{\cos t} \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad Y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad x_0 = \pi$

$$\Rightarrow Y(x) = e^{1-\cos x}\begin{pmatrix} 1 & e^{x}-1 \\ 0 & e^{x} \end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_{\pi}^{x} e^{\cos t-1}\begin{pmatrix} 1 & e^{-t}-1 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\cos t} \\ 0 \end{pmatrix}dt\right]$$

$$= e^{1-\cos x}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_{\pi}^{x} e^{2\cos t-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}dt =$$

$$= e^{1-\cos x}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{-1}\int_{\pi}^{x} e^{2\cos t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}dt = \ldots$$

Falta calcular la integral $\int e^{2\cos t}\,dt$, antes habría que comprobar si no hay errores, pues no es una integral del todo fácil.

SIENTO NO HABERLO ENVIADO ANTES, PERO HE ESTADO MUY OCUPADO PREPARANDO UNOS PERSONALIZADOS.

SUERTE EN EL EXAMEN!!!