~~T~~EMA 2 ELASTICIDAD

• MATRIZ DE TENSIONES DE CAUCHY

$$\bar{\phi} = [T] \cdot \bar{m}$$

↳ versor (vector normalizado $|\,|=1$). (Dirección normal al plano donde calculo la tensión

↳ matriz de tensiones de cauchy

↳ vector de tensiones

$$[T] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

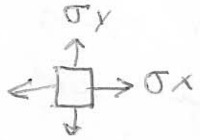
σ - tensiones normales

τ - tensiones tangenciales

* Criterio de signos

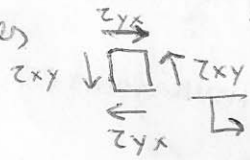
$\boxed{2D}$

- Tensiones normales



y ↳ x   + si salen / - si entran

- Tensiones tangenciales

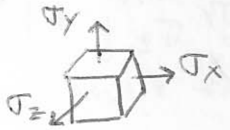


y ↳ x   + si □↑ / - si □↓

↳ 1° ponemos el eje al que es perpendicular

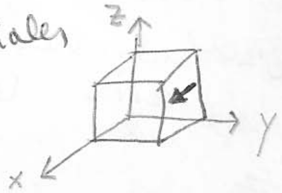
$\boxed{3D}$

- Tensiones normales



y, x, z   + si salen / - si entran

- Tensiones tangenciales



\+ si (en cara vista) lleva la dirección del eje al q es ∥

NOTACIÓN

↳ 1er subíndice.

τ_{yx} → eje ∥

↳ ∈ π ∥ a xz ⇒ y

$$\begin{array}{ccc} \bar{\phi} & T & \vec{m} \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{pmatrix}$$

* Componentes Intrínsecas → proyecciones del vector tensión en las direcc. normal y tangencial al plano.

$$\sigma_n = [\vec{m}]^T \cdot \vec{\phi} = [\vec{m}]^T [T] [\vec{m}]$$

$$\tau_{nm} = \sqrt{|\bar{\phi}|^2 - \sigma_n^2}$$

◦ TENSIONES Y DIRECCIONES PRINCIPALES

- Tensiones ppales → autovalores de la matriz de ten. de cauchy

(*) $\det([T] - \lambda[I]) = 0$

NOTA - En un estado plano siempre hay 3 tensiones ppales y una es igual a cero.

$$\begin{cases} \sigma_1 = \lambda_1 \\ \sigma_2 = \lambda_2 \\ \sigma_3 = 0 \end{cases}$$

→ si $\lambda_3 > 0$ sino $\sigma_1 = \lambda_1$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = \lambda_2$ donde $\lambda_1 > \lambda_2$

- Direcciones ppales → autovectores asociados a los autovalores

NOTA: Existe un plano para el que la componente normal es máxima y se anulan las τ. Los valores de las tensiones para ese plano se denominan ten. ppales y sus direcciones → direcc. ppales

- En 3D: σ_{ppales} son las raíces de:

$$\sigma_0^3 - J_1\sigma_0^2 + J_2\sigma_0 - J_3 = 0 \rightarrow \sigma_{01}, \sigma_{02}, \sigma_{03}$$

J_1, J_2, J_3 → invariantes del tensor de tensiones

$$J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$J_2 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{zx} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

- En 2D:

1° camino - calcular los autovalores y autovectores como (*)

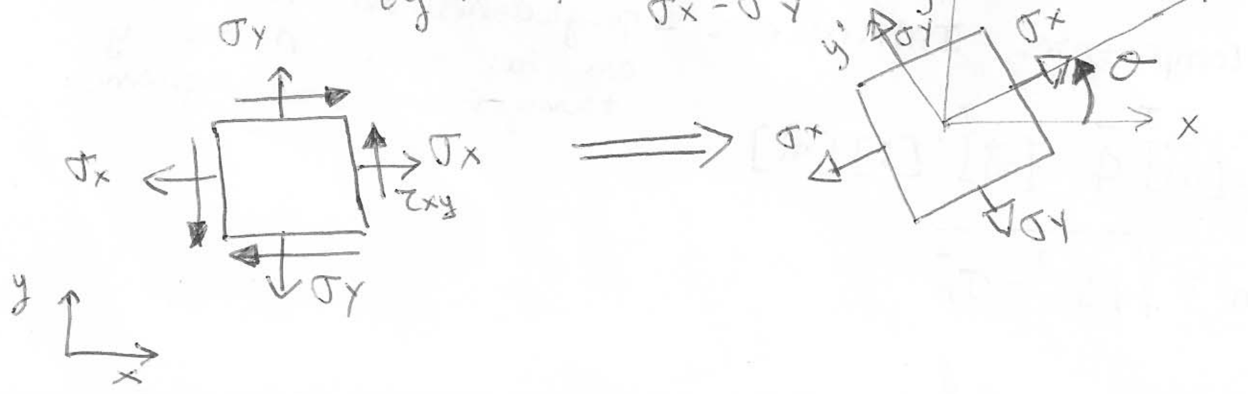
2° " -

$$\sigma_{max,min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

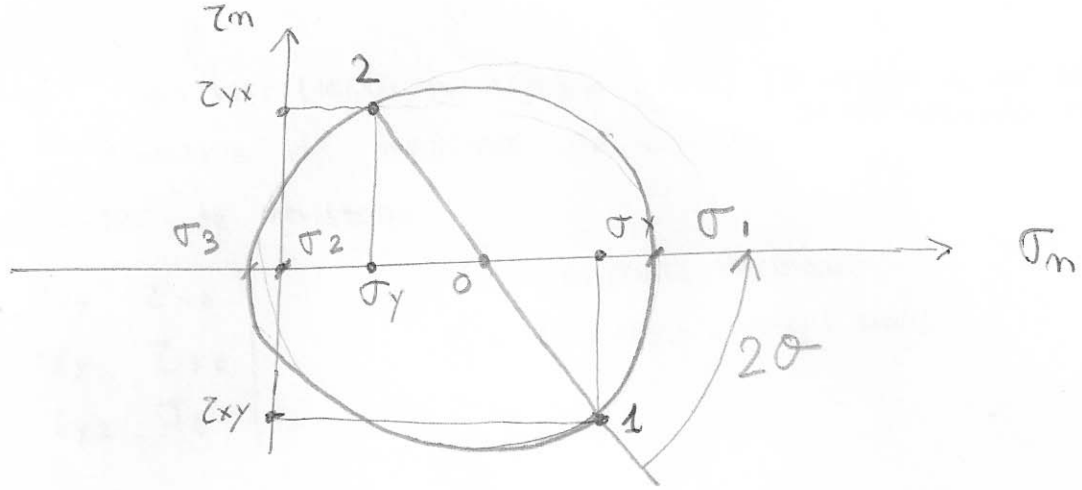
$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

NOTA: Si $\theta > 0$ giro antihorario

$$tg(2\theta) = \frac{+2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$



- Tambien se pueden obtener las σ_{ppales} graficamente a partir de los circulos de Mohr



pto 1

$\sigma_n = \sigma_x$

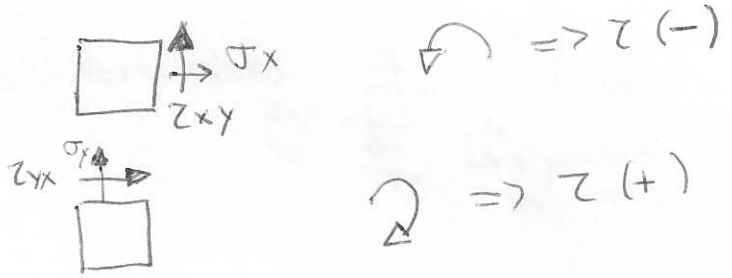
$\tau_m = \tau_{xy}$

NOTA - como no puede girar se cumplirá que $|\tau_{xy}| = |\tau_{yx}|$

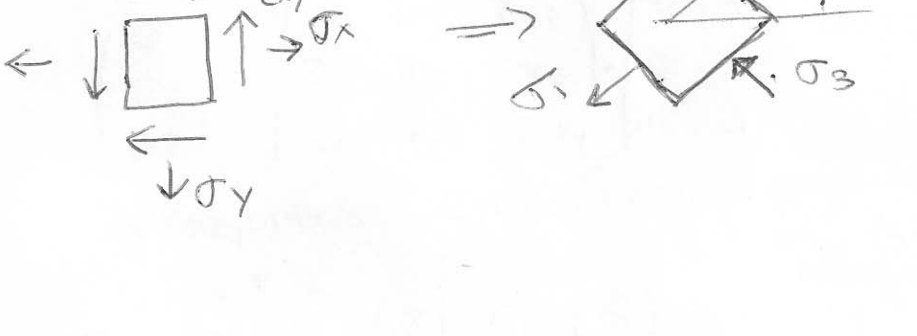
pto 2

$\sigma_n = \sigma_y$

$\tau_m = \tau_{yx}$



- El centro del circulo de Mohr esta donde la recta 1 - 2 corta al eje de abcisas.
- Con centro y radio O1 traso circunferencia
- Los ptos de corte con el eje x son las σ_{ppales}
- El angulo de giro del eje x esta (x) por 2.



TEMA 3 y 4 RESUMEN TEORIA

26 Enero

TEMA 3 - DEFORMACION Y MOVIMIENTOS

DEFORMACION EN EL ENTORNO DE UN PUNTO

$\varepsilon_x = \frac{\Delta l}{\Delta x}$ → variación de longitud de la arista respecto la l. original.

- Campo de desplazamientos: vector que une el pto inicial con el deformado: (u, v, w)

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \qquad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \qquad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

γ → variación angular

- Matriz de deformaciones de un pto.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{bmatrix}}_{[\vec{\varepsilon}]} = \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix}}_{[D]} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{bmatrix}}_{\vec{m}}$$

$\vec{m}$ → dirección de deformación

$[\vec{\varepsilon}]$ → vector deformación

$[D]$ → matriz de deformaciones de Cauchy

Componentes intrínsecas vector deformación

$$\varepsilon_n = \bar{\varepsilon} \cdot \bar{m}$$

$$\frac{1}{2}\gamma_n = \sqrt{\bar{\varepsilon} \cdot \bar{\varepsilon} - \varepsilon_n^2}$$

- La matriz de def. de Cauchy se puede diagonalizar (los autovalores son las deformaciones ppales)

$$[D] = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}$$

(Analoga x tb ∃ circulos de Mohr en deformaciones)

Cambio unitario de volumen.

Dadas las deformaciones principales $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$

$$V_{final} = V_0 (1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3)$$

$$\Delta V = V_{fin} - V_0 = V_0(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3) - V_0$$

$$\Delta V = V_0 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)$$

$$\frac{\Delta V}{V_0} \simeq (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) = I_1$$

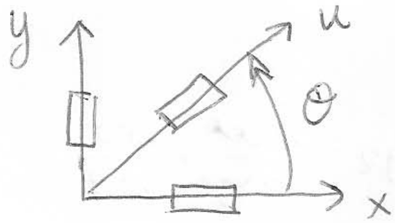
Invariante lineal de la matriz de Cauchy

se carga los términos $\varepsilon_1\varepsilon_2$ $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$ $\varepsilon_2\varepsilon_3$ $\varepsilon_1\varepsilon_3$

Rosetas

$\varepsilon_x, \varepsilon_y \rightarrow$ se pueden conocer con galgas en direcciones $\perp$ x e y.

γ_{xy} no se puede medir $\rightarrow$ se saca con una 3 galga q va en una dirección dada $\vec{u}$



$$\varepsilon_u = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos(2\theta) + \frac{1}{2}\gamma_{xy}\,\mathrm{sen}(2\theta)$$

$\downarrow$ se despeja γ_{xy}

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Para } \theta = 45 \\ \gamma_{xy} = 2\varepsilon_u - (\varepsilon_x + \varepsilon_y)\end{array}}$$

TEMA 4 - LEYES DE COMPORTAMIENTO -

Ley de Hooke $\quad \left.\begin{array}{l} \varepsilon_x = \dfrac{\sigma_x}{E} \\ \varepsilon = \dfrac{\Delta L}{L_0} \end{array}\right\} \quad \sigma = \dfrac{P}{A_0}$

Deformación lateral:

contracción lateral = deformación transversal proporcional a la deformación longitudinal o axial

↳ coeficiente de Poisson

$$\mu = \frac{|\varepsilon_y|}{|\varepsilon_x|} = \frac{|\varepsilon_z|}{|\varepsilon_x|}$$

$$\varepsilon_2 = -\mu \frac{\sigma_1}{E} \qquad \varepsilon_3 = -\mu \frac{\sigma_1}{E}$$

$\mu \rightarrow 0'25 - 0'3$ valores típicos

NOTA

1- Los valores de ~~$\varepsilon_1, \varepsilon_2$~~ son adimensionales (microdeformaciones q nos dan las galgas)

Leyes de Hooke generalizadas

- En fon de tensiones/defor. principales:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{1}{E}\{\sigma_1 - \mu(\sigma_2+\sigma_3)\} \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{E}\{\sigma_2 - \mu(\sigma_1+\sigma_3)\} \\ \varepsilon_3 = \frac{1}{E}\{\sigma_3 - \mu(\sigma_1+\sigma_2)\} \end{cases}$$

- En fon de tensiones/ defor. genéricas:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E}\{\sigma_x - \mu(\sigma_y+\sigma_z)\} \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}\{\sigma_y - \mu(\sigma_x+\sigma_z)\} \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E}\{\sigma_z - \mu(\sigma_x+\sigma_y)\} \end{cases}$$

$$\boxed{\mu = \nu}$$

según bibliografía

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}\cdot 2(1+\mu)}{E} \qquad G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \qquad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \qquad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}$$

$$\boxed{\text{TENSIONES}} \underset{\text{Leyes de Hooke gen.}}{\overset{\text{Ecuaciones de Lamé}}{\rightleftarrows}} \boxed{\text{DEFORMACIONES}}$$

Ecuaciones de Lamé

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2G\cdot\varepsilon_x + \lambda e \\ \sigma_y &= 2G\,\varepsilon_y + \lambda e \\ \sigma_z &= 2G\,\varepsilon_z + \lambda e \end{aligned} \qquad \lambda = \frac{\mu\cdot E}{(1-2\mu)(1+\mu)} \qquad e = \varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$$

Además

$$e = \frac{1}{E}\,\phi\,(1-2\mu) \qquad \phi = \sigma_x+\sigma_y+\sigma_z$$

NOTA

$\hookrightarrow$ TENSION PLANA $\overset{NO}{\Longrightarrow}$ DEF. PLANA (puede aparecer ε_z)

DEF PLANA $\overset{NO}{\Longrightarrow}$ TEN. PLANA (" " $\sigma_z = \mu(\sigma_x+\sigma_y)$)