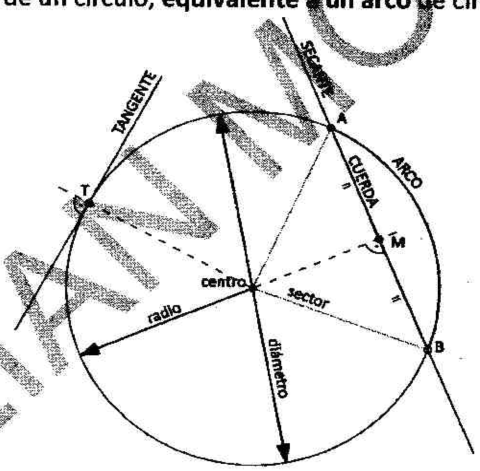
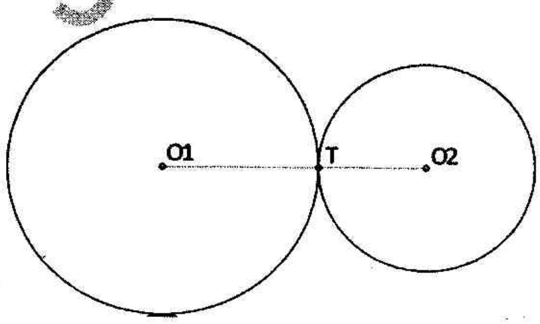
Circunferencia: Definiciones

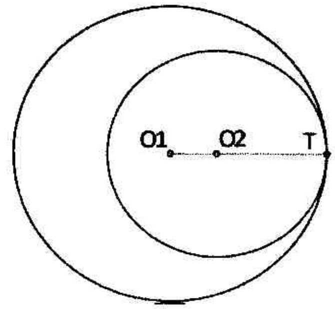
- **Circunferencia:** Lugar geométrico de los **puntos equidistantes** de otro (centro).
- **Círculo: Región** comprendida por una circunferencia. **Área de** la circunferencia.
- **Radio:** Distancia desde cualquier punto de la circunferencia al **centro** de la misma.
- **Diámetro: Recta** que une **dos puntos** de la circunferencia, pasando por su centro.
- **Secante: Recta** que corta a una circunferencia en **dos puntos.**
- **Tangente: Recta** que corta a una circunferencia en **un único punto.**
- **Arco:** Tramo de **circunferencia** comprendido entre **dos puntos.**
- **Cuerda: Recta** que une **dos puntos** de la circunferencia, sin pasar por el centro de la misma.
- **Sector: Región** de un círculo, **equivalente a un arco** de circunferencia.



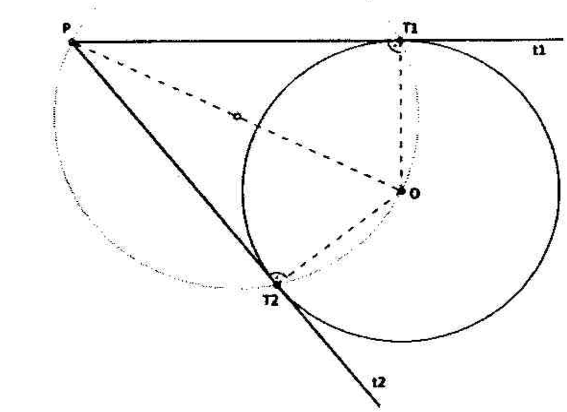
Posiciones relativas de dos circunferencias



Tangentes exteriores

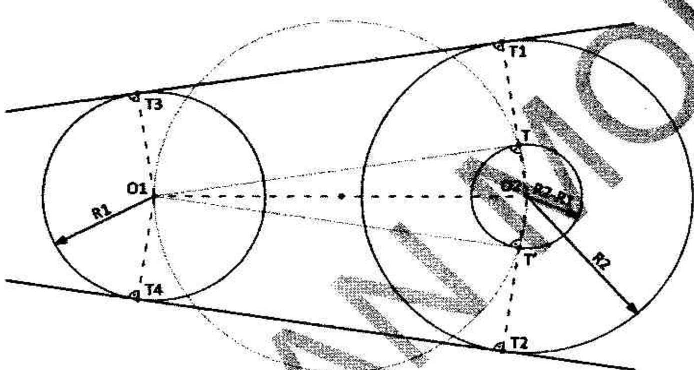


Tangentes interiores



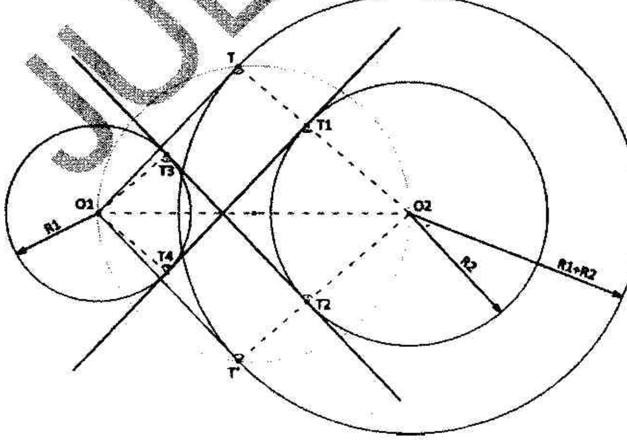
DESDE UN PUNTO EXTERIOR

Sabiendo que la recta tangente y el radio asociado son perpendiculares; utilizamos el teorema del arco capaz para encontrar dos puntos de tangencia T1 y T2.



COMUNES EXTERIORES

Podemos reducir el ejercicio al caso anterior si dibujamos la circunferencia cuyo radio es la diferencia de las anteriores, y trazamos las tangentes desde el centro de la menor. Encontramos T y T', y uniendo con el centro, tenemos los puntos de tangencia T1 y T2. Por paralelismo, hallamos T3 y T4.



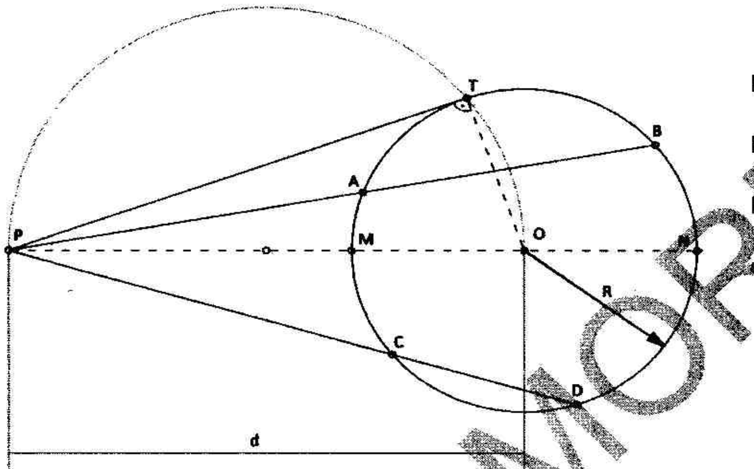
COMUNES INTERIORES

Para resolver el ejercicio a partir del primero de los casos, utilizamos la circunferencia cuyo radio es la suma de las anteriores, y trazamos las tangentes desde el centro de la menor. El proceso es análogo al anterior.

Tabla 1: Tangencias

Potencia

Potencia es la relación de distancias entre un punto cualquiera y dos puntos de una circunferencia, de modo que los tres estén alineados. Es constante para cada punto y cada circunferencia, y depende de la distancia desde el punto al centro, así como del radio de la circunferencia. También está directamente relacionado con la longitud de las tangentes trazadas desde el punto.



$PA \cdot PB = PC \cdot PD = K$

$PT^2 = K$

$PM \cdot PN = (d+R)(d-R)$

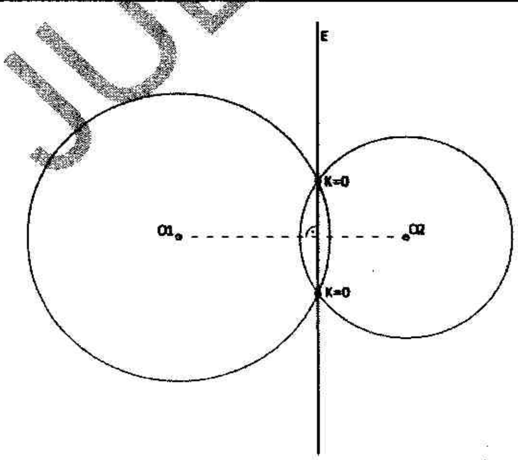
$d^2 - R^2 = K$

- $d > R \rightarrow K > 0$
- $d = R \rightarrow K = 0$
- $d < R \rightarrow K < 0$

Eje radical

- Lugar geométrico de **los puntos equipotentes** de dos circunferencias.

Como los puntos de una circunferencia tienen potencia nula respecto de la misma, partimos del caso de dos circunferencias secantes y desarrollamos todos los casos.

	CIRCUNFERENCIAS SECANTES Como hay dos puntos de potencia nula, al unirlos conseguimos la recta de los puntos equipotentes (que es perpendicular a la recta que une los centros). El eje radical es la **secante común**.

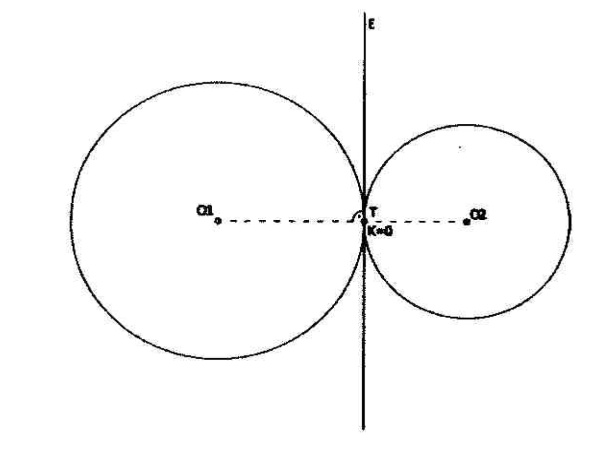
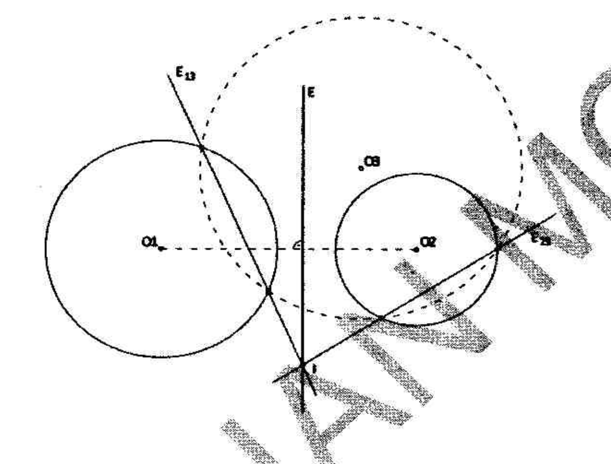
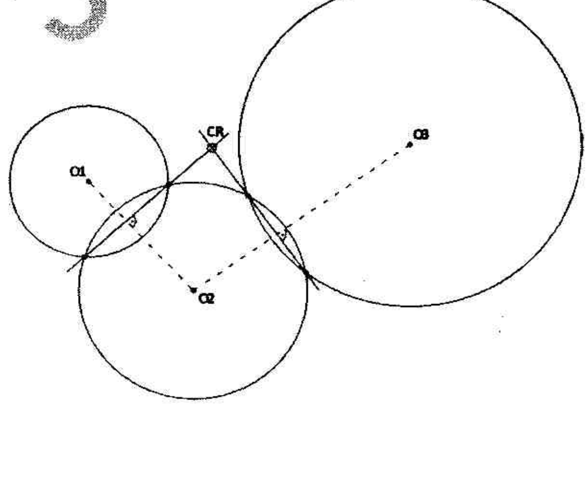
	CIRCUNFERENCIAS TANGENTES Es límite del caso anterior, cuando la distancia entre los puntos equipotentes es cero. El eje radical es la **tangente común.**
	CASO GENÉRICO Si las circunferencias no se cortan, necesitamos una tercera circunferencia auxiliar, para hallar dos ejes radicales que nos den un punto equipotente a ambas (punto I).

Tabla 2: Eje radical

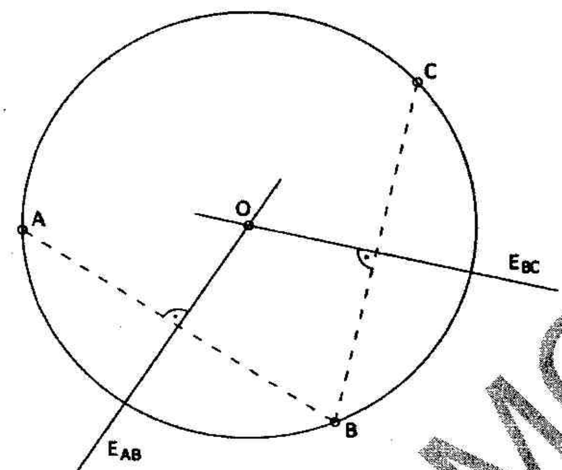
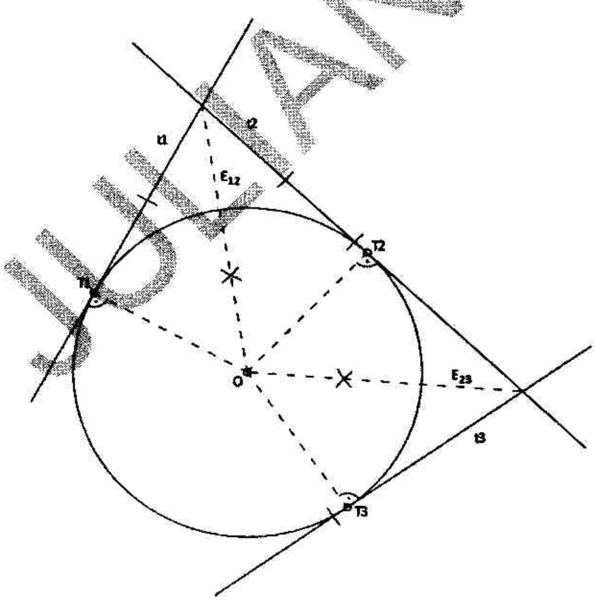
Centro radical

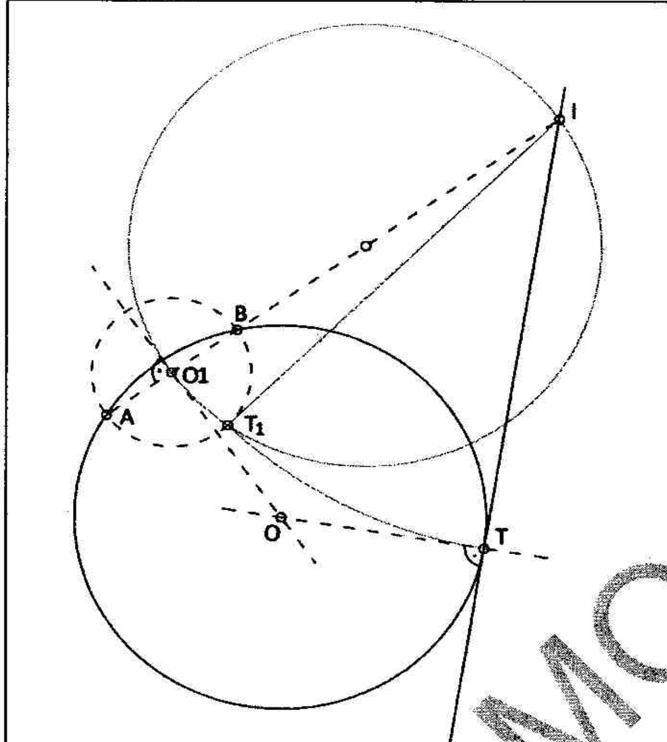


- Es el **punto equipotente** de tres circunferencias.
- Las **tangentes** desde el centro radical a las tres circunferencias **miden** todas **lo mismo**.

Teoremas de Apolonio

Los teoremas de Apolonio utilizan la potencia para resolver distintos casos de un mismo problema: Encontrar el centro y radio de una circunferencia determinada.

	**CASO 1: TRES PUNTOS** Un punto es una circunferencia de radio nulo. Así, el centro es el punto que está a la misma distancia de los tres datos. Esto implica que es el centro radical de las tres circunferencias, y lo hallamos dibujando dos ejes radicales (el eje radical de dos circunferencias de radio igual, es la mediatriz de la recta que une los centros).
	**CASO 2: TRES RECTAS TANGENTES** Una recta es una circunferencia de radio infinito. El centro de la circunferencia es el centro radical de las tres circunferencias, que hallamos por intersección de dos ejes radicales (las bisectrices).



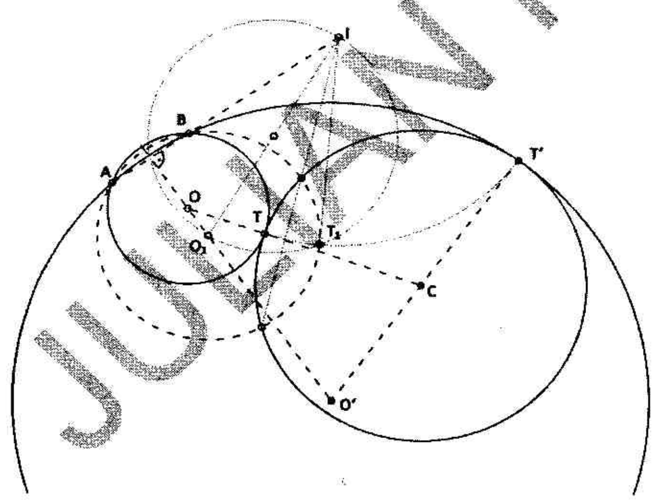
CASO 3: DOS PUNTOS Y UNA RECTA TANGENTE

•El centro debe estar en la mediatriz de A y B.

•Unimos A con B y prolongamos hasta intersecar la recta dada. El punto de intersección I es equipotente de todas las circunferencias que pasan por A y B.

•Dibujamos una circunferencia cualquiera, que pase por A y B (centro O1), y buscamos su tangente desde I (punto T1).

•Todas las tangentes desde I miden lo mismo, así que podemos encontrar el punto de tangencia de la solución (T), y el centro de la circunferencia (O).



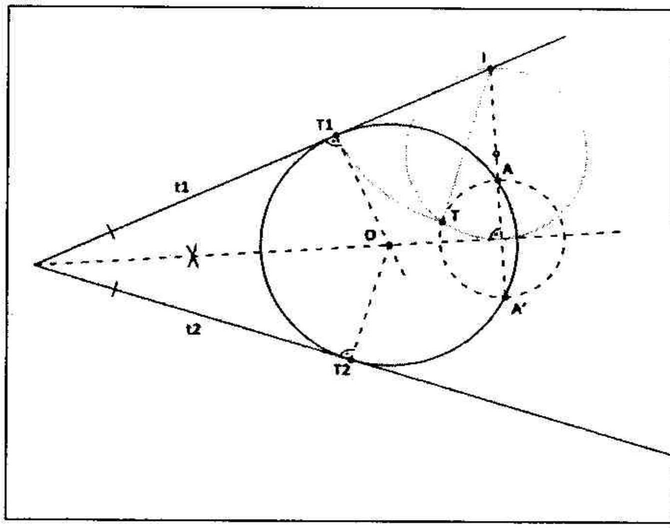
CASO 4: DOS PUNTOS Y UNA CIRCUNFERENCIA TANGENTE

•El centro debe estar en la mediatriz de A y B.

• Dibujamos una circunferencia cualquiera, que pase por A y B (centro O1), y buscamos su eje radical con la circunferencia dada (centro C).

• Unimos A con B y prolongamos hasta intersecar el eje radical. El punto de intersección I es equipotente de todas las circunferencias que pasan por A y B. Dibujamos la tangente desde I a la circunferencia de centro O1 (punto T1).

•Todas las tangentes desde I miden lo mismo, así que podemos encontrar el punto de tangencia de las soluciones (T y T'), y el centro de las circunferencias (O y O').



CASO 5: DOS RECTAS TANGENTES Y UN PUNTO

•El centro debe estar en la bisectriz de ambas rectas.

•Si hallamos A' (el simétrico de A respecto de la bisectriz), el problema se convierte en el caso 3.

Tabla 3: Teoremas de Apolonio