LA REGLA ÁUREA Y EL NÚMERO DE ORO

Prof. Hugo Omar Pajello
hpajello@ing.unrc.edu.ar
Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Río Cuarto

INTRODUCCIÓN – DEFINICIONES

- **Proporción**

Es la igualdad entre dos razones.

Proporción de cuatro términos ó proporción discontinua:

Es de la forma: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

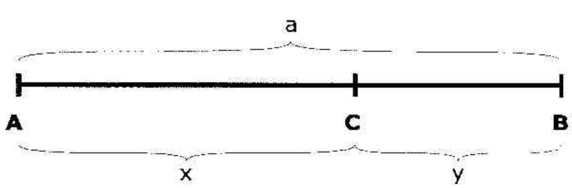
Los términos a y d se llaman extremos y los términos b y c medios de la proporción.

Proporción de tres términos o proporción continua:

Es de la forma $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ el término b se llama medio proporcional entre a y c.

- **Media y extrema razón de un segmento**

Se dice que un punto C divide a un segmento $\overline{AB}$ en "media y extrema razón" cuando la parte mayor de esta división **x** es medio proporcional entre el segmento total **a** y la parte menor **y**



$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y}$$

Esto también se llama "división áurea" del segmento o **"divina proporción"**.
La parte mayor, x, se llama **"segmento áureo de a"**.

- **Relación entre el segmento áureo "x" y su resto "y"** (primera sorpresa!!)

Si x es el segmento áureo de a, resultará que: $\frac{a}{x} = \frac{x}{y}$

restando 1 en ambos miembros $\frac{a}{x} - 1 = \frac{x}{y} - 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{a-x}{x} = \frac{x-y}{y}$

pero como $a = x + y$ resulta: $y = a - x$

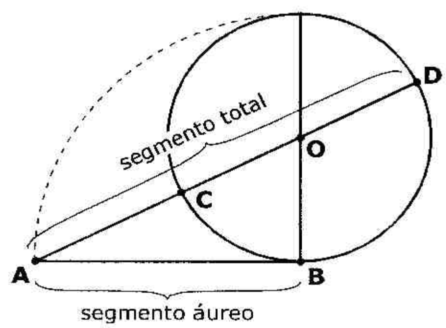
reemplazando en la expresión anterior: $\frac{y}{x} = \frac{x-y}{y}$

invirtiendo estas razones obtenemos que $\boxed{\frac{x}{y} = \frac{y}{x-y}}$ **(1)**

entonces ¡¡"y"es segmento áureo de "x"... y este proceso será continuo !!

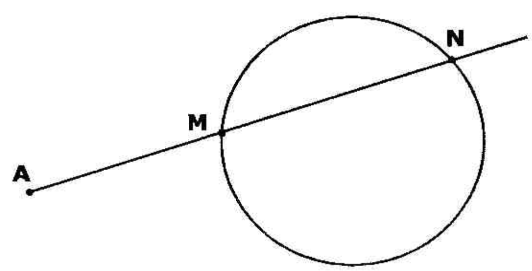
DOS CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS

1) Dado un segmento áureo **¿cómo encontrar el segmento total?**



Con diámetro igual al segmento áureo AB se traza una circunferencia tangente al segmento áureo en un extremo del mismo.
La semirrecta trazada desde el otro extremo del segmento áureo y que pasa por el centro de la circunferencia, determina con ésta, el segmento total

Demostración:
Recordando que se llama "potencia de un punto con respecto a una circunferencia" al producto de los segmentos que se obtienen al trazar por ese punto una secante a la circunferencia.
Por ejemplo:



$\text{Pot. A} = \overline{AM} \cdot \overline{AN}$

La potencia de A respecto a la circunferencia del ejemplo anterior, será:

$$\text{Pot. A} = \overline{AC} \cdot \overline{AD} = \overline{AB}^2$$

La parte mayor entre $\overline{AC}$ y $\overline{CD}$ es $\overline{CD}$ que es igual a la medida del segmento áureo: $\overline{CD} = \overline{AB}$.

Entonces: $\overline{AC} \cdot \overline{AD} = \overline{CD}^2$

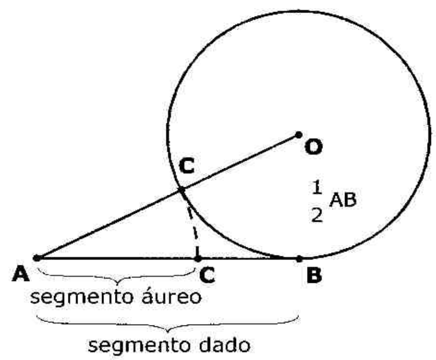
de donde obtenemos $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{CD}} = \dfrac{\overline{CD}}{\overline{AC}}$

Luego $\overline{\mathbf{AD}}$ **es el segmento total.**

2) Dado el segmento $\overline{AB}$ **¿cómo encontrar su segmento áureo?**

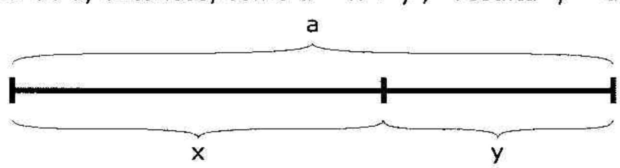
En la construcción anterior, el segmento $\overline{AD}$ quedó dividido en dos, la parte menor $\overline{AC}$ y la parte mayor $\overline{CD}$ que es su segmento áureo.

Por la propiedad (1) la parte menor $\overline{AC}$ es el segmento áureo de la parte mayor $\overline{CD}$ que es igual a $\overline{AB}$. En consecuencia, llevando la medida de $\overline{AC}$ sobre el segmento $\overline{AB}$, obtenemos su segmento áureo.



EL NÚMERO DE ORO Ó NÚMERO ÁUREO

Si x es el segmento áureo de a, entonces, como a = x + y , resulta y = a – x .



Luego como:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{x} = \frac{x}{a-x} \quad \Rightarrow \quad a\,(a-x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + ax - a^2 = 0$$

$$x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4a^2}}{2} = \frac{-a \pm \sqrt{5a^2}}{2} = \frac{-a \pm a\sqrt{5}}{2} = a\,\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

como $x > 0$

$$\boxed{x = a\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$$

de donde resulta que la razón entre la longitud de un segmento y la de su segmento áureo, llamada **razón áurea** es:

$$\frac{a}{x} = \frac{2}{-1+\sqrt{5}} = \phi = 1,6180339\ldots \cong \frac{809}{500}$$

Esta constante ϕ es un número irracional cuadrático conocido como ***número áureo*** **ó** ***número de oro*****.**

Entonces: $\phi = \frac{a}{x} = \frac{2}{-1+\sqrt{5}}$

racionalizando el denominador

$$\frac{a}{x} = \frac{2}{-1+\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1} = \frac{2\left(\sqrt{5}+1\right)}{5-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \phi \Rightarrow \boxed{\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \frac{a}{x}} \qquad \textbf{(2)}$$

Esta expresión es más conocida que la anterior, entonces:

si en la proporción anterior $\frac{a}{x} = \frac{x}{y}$ consideramos $a = 1$

la razón áurea será $\phi = \frac{1}{x} \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{\phi}}$ **(3)**

y la citada proporción será: $\frac{1}{x} = \frac{x}{y} \Rightarrow x^2 = y$

además, como $x + y = 1$

resulta que $x + x^2 = 1$

y utilizando (3) nos queda: $\boxed{\frac{1}{\phi} + \frac{1}{\phi^2} = 1}$ **(4)**

OTRA FORMA DE GENERAR LA SECCIÓN ÁUREA

Sea **a** la longitud de un segmento y **x** la de su segmento áureo, entonces resulta:

$a = x + y$ y $\frac{a}{x} = \frac{x}{y}$

En la expresión $a = x + y$ si dividimos por x resulta:

$$\frac{a}{x} = \frac{x+y}{x} = 1 + \frac{y}{x} = \frac{1}{\frac{x}{y}}$$

luego reemplazando $\frac{x}{y}$ nos queda:

$$\boxed{\frac{a}{x} = 1 + \frac{1}{\frac{a}{x}}} \qquad \textbf{(5)}$$

Por este mecanismo recursivo resulta:

$$\frac{a}{x} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{a}{x}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{a}{x}}}} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

la razón áurea es una <u>fracción continua</u>.

Este desarrollo de la fracción continua converge, por lo indicado en (2), al número ϕ.

$$\frac{a}{x} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \ldots\ldots}}}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \phi$$

Por otro lado, como por (2): $\frac{a}{x} = \phi$

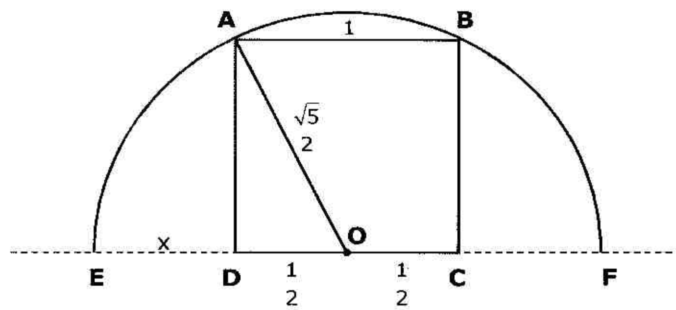
la expresión (5) queda: $\phi = 1 + \frac{1}{\phi}$

luego: $\frac{a}{x} = 1 + \frac{1}{\phi}$

y el desarrollo de esta fracción continua convergente a ϕ será:

$$\frac{a}{x} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \ldots\ldots}}}} = \phi$$

Considerando el cuadrado ABCD de lado unitario, $\overline{AB} = 1$



Como $\overline{AO}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DO}^2 \quad \Rightarrow \quad \overline{AO}^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \quad \Rightarrow \quad \overline{AO} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

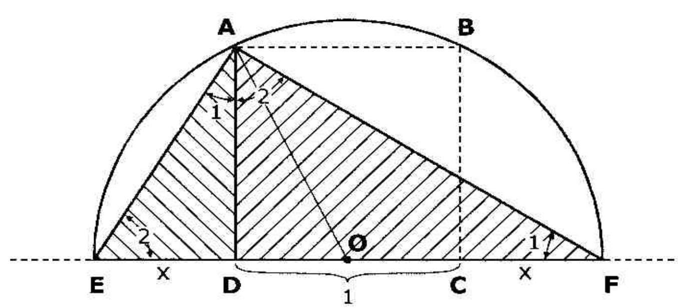
Con este radio trazamos una semicircunferencia y calculamos la longitud del segmento $\overline{ED}$ que llamaremos x

$$\overline{ED} = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} = x \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

racionalizando el numerador: $x = \dfrac{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}{2(\sqrt{5}+1)} = \dfrac{2}{\sqrt{5}+1} = \dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}} = \dfrac{1}{\phi}$

Este segmento x representa la razón áurea encontrada en (3).

Siguiendo la construcción anterior y uniendo los puntos A con E y A con F:



Podemos considerar los triángulos: $\overset{\Delta}{ADE}$ y $\overset{\Delta}{ADF}$.

Ellos son semejantes por ser rectángulos y tener ángulos agudos iguales, en consecuencia sus lados homólogos son proporcionales, de donde:

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x+1} \quad \Rightarrow \quad x\,(\,x + 1\,) = 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 + x - 1 = 0$$

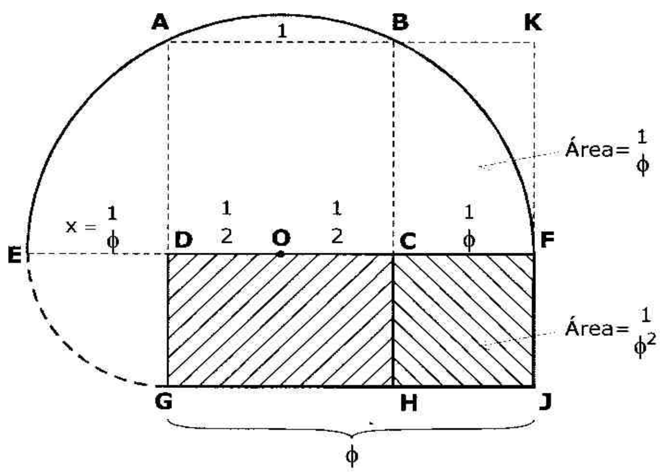
considerando la relación (3) reemplazamos x por $\frac{1}{\phi}$ y la ecuación anterior resulta

$$\boxed{\frac{1}{\phi^2} + \frac{1}{\phi} = 1}$$

nuevamente la relación (4).

OTRA CONSTRUCCIÓN GEOMÉTRICA

En la figura anterior, con centro en D y radio $\overline{ED} = \frac{1}{\phi}$ trazamos el arco $\overset{\frown}{EG}$ y construimos los rectángulos $\overset{\square}{DCHG}$; $\overset{\square}{BKFC}$ y el cuadrado $\overset{\square}{CFJH}$



Por ser

$$\left.\begin{array}{l} \text{Área} \quad \overset{\square}{DCHG} = 1 \cdot \frac{1}{\phi} = \frac{1}{\phi} \\[2ex] \text{Área} \quad \overset{\square}{CFJH} = \frac{1}{\phi} \cdot \frac{1}{\phi} = \frac{1}{\phi^2} \\[2ex] \text{y por (4)} \quad \frac{1}{\phi} + \frac{1}{\phi^2} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Área} \quad \overset{\square}{DFJG} = 1 = \text{Área} \quad \overset{\square}{ABCD}$$

Pero: $\quad \text{Área} \ \overset{\square}{DFJG} = \overline{DF} \cdot \overline{DG}$

de donde: $$DF = \frac{\text{Area } \overset{\square}{DFJG}}{\overline{DG}} = \frac{1}{\frac{1}{\phi}} = \phi$$

Entonces: $\overline{DF} = \phi$

pero: $\overline{DF} = 1 + \frac{1}{\phi}$

luego: $$\boxed{\phi = 1 + \frac{1}{\phi}} \qquad \textbf{(6)}$$

que es equivalente a (5)

Por otro lado, como $\overline{AG} = 1 + \frac{1}{\phi}$

resulta por (6) $\overline{AG} = \phi$

el Área $\overset{\square}{ABHG} = 1 \, . \, \phi = \phi$

Por eso este rectángulo se llama **rectángulo áureo**

Como: Área $\overset{\square}{BKFC} = 1 \, . \, \frac{1}{\phi} = \frac{1}{\phi}$; Área $\overset{\square}{AKJG} = \phi \, . \, \phi = \phi^2$

y Área $\overset{\square}{AKJG}$ = Área $\overset{\square}{ABCD}$ + Área $\overset{\square}{BKFC}$ + Área $\overset{\square}{CFJH}$ + Área $\overset{\square}{DCHG}$

Reemplazando estas áreas por los valores obtenidos anteriormente tenemos

$$\phi^2 = 1 + \frac{1}{\phi} + \frac{1}{\phi^2} + \frac{1}{\phi} = \text{[por (6) y por (4) resulta]} = 1 + \phi$$

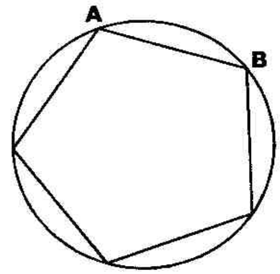
luego: $$\boxed{\phi^2 = \phi + 1} \qquad \textbf{(7)}$$

que también se obtiene de (4).

multiplicando ambos miembros por ϕ obtenemos:

$$\boxed{\phi^3 = \phi^2 + \phi} \qquad \textbf{(8)}$$

• El lado de un pentágono regular inscripto en una circunferencia de radio unitario es: $\overline{AB} = \sqrt{1+\phi^2}$



• La diagonal de un pentágono regular inscripto en una circunferencia es medio proporcional entre el diámetro de la circunferencia y la altura del pentágono

$$\frac{\text{diámetro de la circunferencia}}{\text{diagonal del pentágono}} = \frac{\text{diagonal del pentágono}}{\text{altura del pentágono}}$$

• Rostro femenino matemáticamente hermoso

Llamando:

"a" a la distancia desde el comienzo de la frente hasta la punta del mentón;

"b" a la distancia entre el mentón y la línea de unión de los párpados;

"c" a la distancia desde el comienzo de la frente hasta la línea de unión de los párpados;

el rostro femenino matemáticamente hermoso es el que guarda la siguiente proporción:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$$