

1.- Con la finalidad de modernizar la economía, el gobierno de un país del Este de Europa impulsa nuevos proyectos en los campos de la informática y de las telecomunicaciones. Los proyectos se han asignado a dos grandes compañías. IBM ha firmado el 40% de los proyectos, mientras que AT&T ha firmado el 60% restante. De los proyectos conseguidos por IBM, el 30% pertenecen al sector de la informática y el resto al de las telecomunicaciones, mientras que de los proyectos de AT&T sólo un 20% pertenecen al sector informático.

a) ¿Cuál es el porcentaje de proyectos del campo de la informática que son ejecutados por IBM?

Sean los sucesos:

IBM: el proyecto se ha asignado a IBM

AT: el proyecto se ha asignado a AT&T

INF: proyecto del campo de la informática

TEL: proyecto del campo de las telecomunicaciones

$$P(\text{IBM}) = 0.4$$

$$P(\text{INF} \mid \text{IBM}) = 0.3$$

$$P(\text{TEL} \mid \text{IBM}) = 0.7$$

$$P(\text{AT}) = 0.6$$

$$P(\text{INF} \mid \text{AT}) = 0.2$$

$$P(\text{TEL} \mid \text{AT}) = 0.8$$

Nos piden calcular $P(\text{IBM} \mid \text{INF})$ que por BAYES es igual a:

$$P(\text{IBM} \mid \text{INF}) = \frac{P(\text{INF} \mid \text{IBM}) \cdot P(\text{IBM})}{P(\text{INF} \mid \text{IBM}) \cdot P(\text{IBM}) + P(\text{INF} \mid \text{AT}) \cdot P(\text{AT})} = \frac{0.3 \cdot 0.4}{0.3 \cdot 0.4 + 0.2 \cdot 0.6} = 0.5$$

b) ¿Cuál es el porcentaje de proyectos informáticos?

Por el teorema de la probabilidad total tenemos que:

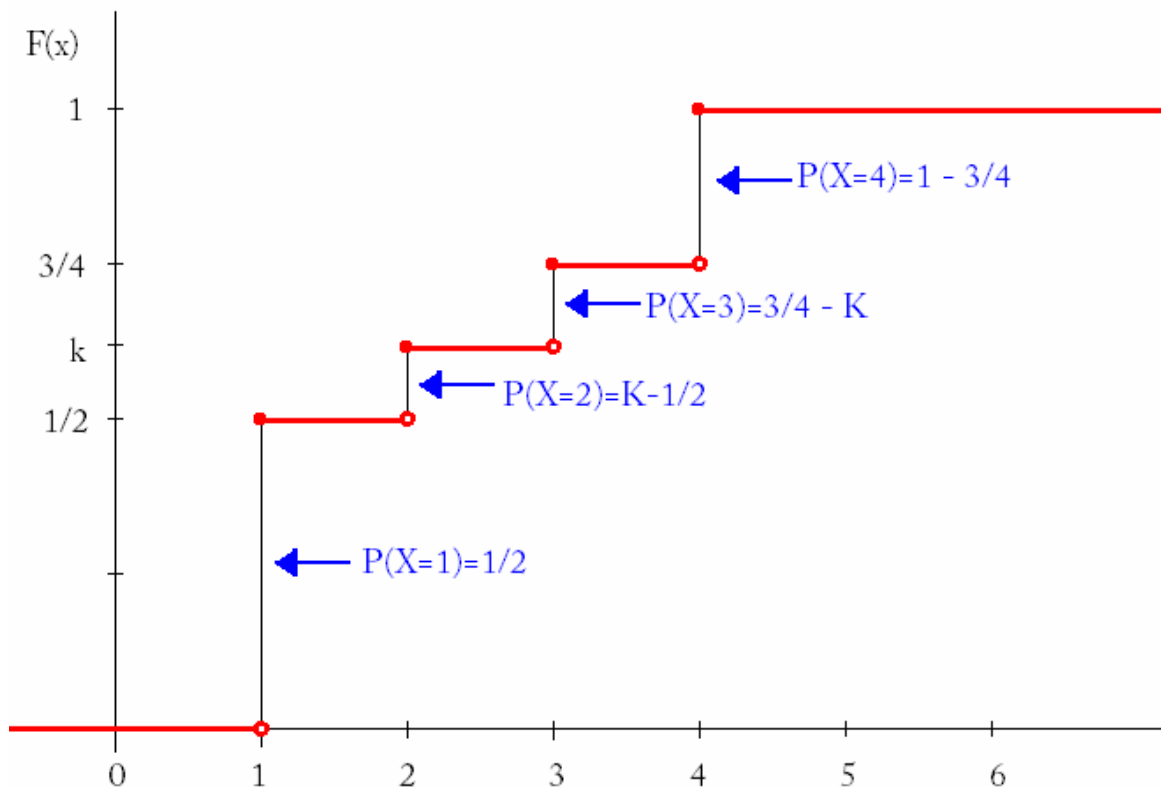
$$P(\text{INF}) = P(\text{INF} \mid \text{IBM}) \cdot P(\text{IBM}) + P(\text{INF} \mid \text{AT}) \cdot P(\text{AT}) = 0.3 \cdot 0.4 + 0.2 \cdot 0.6 = 0.24$$

2.- Dada la función

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ k & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ \frac{3}{4} & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ 1 & \text{si } 4 \leq x \end{cases}$$

si k es una constante, ¿qué valor deberá tomar k para que $F(x)$ pueda ser la función de distribución de una variable aleatoria discreta?

Si representamos la función de distribución tenemos:



De la que deducimos, por ser no decreciente, que k debe estar comprendida entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{4}$.

Además, como sabemos que la suma de las probabilidades debe ser igual a 1, tenemos

$$\sum_{i=1}^4 P(x=i) = 1 = \frac{1}{2} + k - \frac{1}{2} + \frac{3}{4} - k + \frac{1}{4}, \text{ que se cumple para cualquier valor de } k.$$

Por tanto, para que $F(x)$ sea la función de distribución de una variable aleatoria discreta se debe cumplir que: $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4}$

3.- El 55% de los alumnos de cierta asignatura aprueba en junio. El 70% de los presentados en septiembre también aprueba la asignatura. Sabiendo que los alumnos que se presentaron en septiembre son únicamente los que no aprobaron en junio, determina:

a) La probabilidad de que un alumno seleccionado al azar haya aprobado la asignatura

Definimos los sucesos:

J: un alumno se examina en junio

S: un alumno se examina en septiembre

A: un alumno aprueba

Considerando, para poder resolverlo por el teorema de la probabilidad total, que en junio solo se presentan los que aprobaron en junio y en septiembre se presentan los demás.

$$P(J)=0.55 \quad P(A|J)=1$$

$$P(S)=0.45 \quad P(A|S)=0.70$$

$$P(A)=P(A|J) \cdot P(J)+P(A|S) \cdot P(S) = 1 \cdot 0.55 + 0.45 \cdot 0.70 = 0.865$$

b) Si sabemos que un estudiante ha aprobado la asignatura, la probabilidad de que haya sido en junio

Por Bayes tenemos

$$P(J|A) = \frac{P(A|J) \cdot P(J)}{P(A|J) \cdot P(J) + P(A|S) \cdot P(S)} = \frac{1 \cdot 0.55}{1 \cdot 0.55 + 0.7 \cdot 0.45} = 0.636$$

4.- Sea X el número de neumáticos con baja presión de un automóvil seleccionado al azar

a) ¿Cuál de las siguientes tres funciones $p(x)$ es una función de probabilidad para x ? ¿Por qué no son válidas las otras dos funciones?

| | X | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|--------|-----|-----|-----|------|------|
| 1 | $P(x)$ | 0.3 | 0.2 | 0.1 | 0.05 | 0.05 |
| 2 | $P(x)$ | 0.4 | 0.1 | 0.1 | 0.1 | 0.3 |
| 3 | $P(x)$ | 0.4 | 0.1 | 0.2 | 0.1 | 0.3 |

Para que cualquiera de estas tres funciones pueda ser una función de probabilidad tendrá que cumplir que $\sum_{i=0}^4 P(x=i) = 1$, condición que sólo cumple la segunda función.

- b) Para la función de probabilidad elegida calcular
 $P(2 \leq X \leq 4)$
 $P(X \neq 0)$

Usando la segunda función de la tabla para resolver estas probabilidades tenemos:

$$P(2 \leq X \leq 4) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) = 0.1 + 0.1 + 0.3 = 0.5$$

$$P(X \neq 0) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) = 0.1 + 0.1 + 0.1 + 0.3 = 0.6$$

5.- La empresa "Construcciones Ibéricas" está interesada en ciertos elementos de la construcción para los que busca un valor nominal de resistencia a la compresión de 250 kg/cm^2 . Consciente de la variabilidad inevitable de los procesos, la empresa aceptaría producto con resistencia comprendida entre 245 y 255 kg/cm^2 .

- a) Si el proceso productivo del proveedor sigue una distribución Normal de media 250 kg/cm^2 y desviación típica de 2.2 kg/cm^2 ¿qué porcentaje de producto del proveedor no cumpliría las exigencias de "Construcciones Ibéricas"?

Sea el suceso **R**: resistencia de los elementos de construcción del proveedor

Sabemos que $R \sim N(m=250, \sigma=2.2)$, y la probabilidad pedida es:

$$P(R \leq 245 \cap R \geq 255) = 1 - P(245 < R < 255) = 1 - P\left(\frac{245 - 250}{2.2} < \frac{R - 250}{2.2} < \frac{255 - 250}{2.2}\right) = 1 - P(-2.27 < N(0,1) < 2.27) = 1 - [1 - 2 \cdot P(N(0,1) \geq 2.27)] = 2 \cdot 0.0116 = 0.0232$$

Luego, el 2.32% de producto del proveedor no cumpliría las exigencias de Construcciones Ibéricas

Para efectuar el control de calidad de las partidas que le llegan, la empresa somete la partida a un muestreo de aceptación donde se procede a medir la resistencia a

compresión de una muestra de 15 unidades tomadas al azar para decidir si aceptar o no las partidas.

b) Si el proceso del proveedor da elementos cuyo valor de resistencia sigue una distribución $\sim N(m=250, \sigma=2.2)$, ¿qué probabilidad hay de que en el ensayo la resistencia medida en la muestra de una media mayor que 249 kg/cm²?

Si la resistencia sigue una distribución Normal $R \sim N(m=250, \sigma=2.2)$, la resistencia media seguirá también una distribución normal con la misma media pero con la desviación típica dividida por la raíz cuadrada del tamaño de la muestra:

$$\bar{R} \sim N(m=250, \sigma=2.2/\sqrt{15})$$

Con lo que la probabilidad pedida será:

$$\begin{aligned} P(\bar{R} > 249) &= P(N(0,1) > \frac{249 - 250}{\frac{2.2}{\sqrt{15}}}) = P(N(0,1) > \frac{249 - 250}{0.568}) = P(N(0,1) > -1.76) = \\ &= 1 - P(N(0,1) > 1.76) = 1 - 0.03920 = 0.9608 \end{aligned}$$

c) Si realizamos 10 veces el ensayo, ¿cuál es la probabilidad de que más de 8 veces en el ensayo la muestra tenga una media mayor que 249 kg/cm²?

Sea el suceso X: nº de veces que la muestra supera los 249 kg/cm²

$$X \sim Bi(n=10, p=0.96)$$

$$\begin{aligned} P(X > 8) &= P(X \geq 9) = P(X=9) + P(X=10) = \binom{10}{9} p^9 (1-p)^1 + \binom{10}{10} p^{10} (1-p)^0 = \\ &= 0.96^9 \cdot (1-0.96) + (0.96)^{10} = 0.94 \end{aligned}$$

d) Una vez aceptada la oferta del nuevo proveedor el departamento de Logística pide que los nuevos elementos constructivos, cuyo peso se distribuye según una Normal de media 75 kg y variabilidad de 1.1 kg, se distribuyan en palets con 10 unidades. ¿Cuál es la probabilidad de que un palet de material pese menos de 747 kg?

X: peso de cada elemento $\sim N(m=75, \sigma=1.1)$

Y: peso de un palet

$$Y = X_1 + X_2 + \dots + X_{10} \sim N(m=750, \sigma = \sqrt{10 \cdot 1.1^2}) = N(m=750, \sigma=3.4785)$$

Luego

$$P(Y < 747) = P(N(0,1) \leq \frac{747 - 750}{3.4785}) = P(N(0,1) \leq -0.86) = 0.195$$

e) El jefe del departamento de Logística en una visita de control al almacén de recepción procee a pesar palets de mercancía hasta encontrar uno que pese menos de 747 kg. ¿Cuál es la probabilidad de que se necesiten pesar 10 palets para encontrar el primero que lo cumpla? ¿Cuál es la probabilidad de que tenga que pesar más de 15 palets?

P: número de palets pesados hasta el primero que sea de peso < 747

P ~ G(p=0.195)

$$P(G=10) = (1-p)^9 \cdot p = (1-0.195)^9 \cdot 0.195 = 0.028$$

X: número de palets defectuosos ~ Bi(n=15, p=0.195)

$$P(G > 15) = P(X=0) = \binom{15}{0} p^0 (1-p)^{15} = 1 \cdot 1 \cdot (1-0.195)^{15} = 0.039$$

Fuente: enunciados correspondientes a exámenes de diferentes años de la Universidad Politécnica de Valencia.