

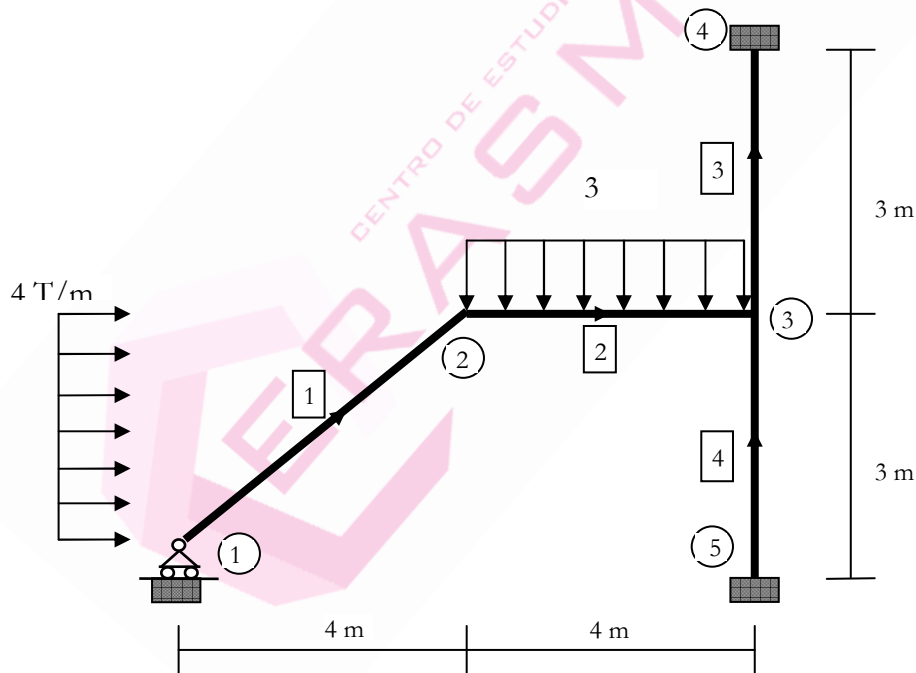
PROBLEMA 3

(Diciembre 2002)

La figura adjunta muestra el esquema de una estructura. Se pide:

1. Modelización
2. Ensamblado y cálculo de la matriz de rigidez
3. Vectores de empotramiento perfecto, realizando el paso de locales a globales.
4. Cálculo de los movimientos existentes.
5. Leyes de solicitaciones de todas las barras, dibujando a estima los correspondientes diagramas.

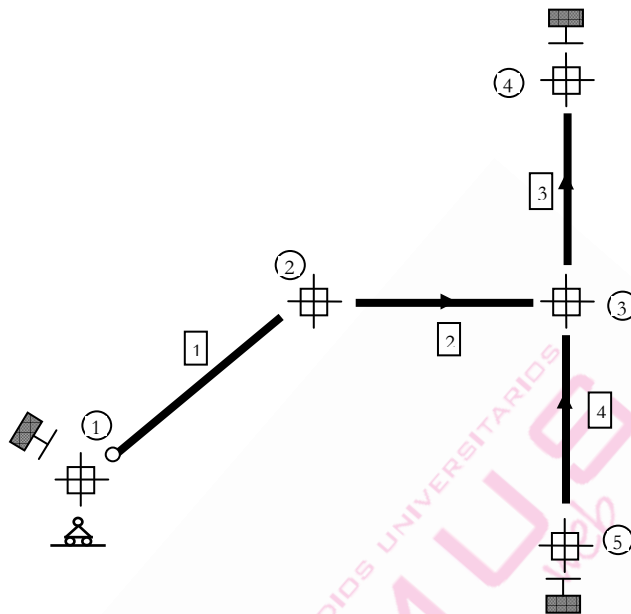
DATOS: $E \cdot I = 6000 \text{ T} \cdot \text{m}^2$ $E \cdot A = 15000 \text{ T}$



No se desprecian las deformaciones por axil

RESOLUCIÓN.

1º Modelización:



Movimientos

incógnita:

NUDO 1: $\Delta_X^1 = ? \rightarrow R_X^1 = 0$

$\Delta_Y^1 = 0 \rightarrow R_Y^1 = ?$

$\theta_Z^1 = 0 \rightarrow M_Z^1 = ? = 0$

Por tener una única barra articulada

NUDO 2: $\Delta_X^2 \neq 0$

$\Delta_Y^2 \neq 0$

$\Delta_Z^3 \neq 0$

NUDO 3: $\Delta_X^3 \neq 0$

$\theta_Z^2 \neq 0$

$\theta_Z^3 \neq 0$

NUDO 4: $\Delta_X^4 = 0$

$\Delta_Y^4 = 0$

$\theta_Z^4 = 0$

NUDO 5: $\Delta_X^5 = 0$

$\Delta_Y^5 = 0$

$\theta_Z^5 = 0$

Barra 1:
$$\begin{array}{c|c} K_{11} & K_{12} \\ \hline K_{21} & K_{22} \end{array}$$

Barra 2:
$$\begin{array}{c|c} K_{22} & K_{23} \\ \hline K_{32} & K_{33} \end{array}$$

Barra 3:
$$\begin{array}{c|c} K_{33} & K_{34} \\ \hline K_{43} & K_{44} \end{array}$$


Barra 4:
$$\begin{array}{c|c} K_{55} & K_{53} \\ \hline K_{35} & K_{33} \end{array}$$

2º Ensamblado y cálculo de la matriz de rigidez:

$$\begin{bmatrix} R_X^1 \\ R_Y^1 \\ M_Z^1 \\ R_X^2 \\ R_Y^2 \\ M_Z^2 \\ R_X^3 \\ R_Y^3 \\ M_Z^3 \\ R_X^4 \\ R_Y^4 \\ M_Z^4 \\ R_X^5 \\ R_Y^5 \\ M_Z^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & 0 & 0 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 + K_{22}^2 & K_{23}^2 & 0 & 0 \\ 0 & K_{32}^2 & K_{33}^2 + K_{33}^3 + K_{33}^4 & K_{34}^3 & K_{35}^4 \\ 0 & 0 & K_{43}^3 & K_{44}^3 & 0 \\ 0 & 0 & K_{53}^4 & 0 & K_{55}^4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta_X^1 \\ \Delta_Y^1 \\ \theta_Z^1 \\ \Delta_X^2 \\ \Delta_Y^2 \\ \theta_Z^2 \\ \Delta_X^3 \\ \Delta_Y^3 \\ \theta_Z^3 \\ \Delta_X^4 \\ \Delta_Y^4 \\ \theta_Z^4 \\ \Delta_X^5 \\ \Delta_Y^5 \\ \theta_Z^5 \end{bmatrix} + Q^{e'}$$

2.1. Construcción de las matrices k-barra en locales.

Barra 1:



$L = 5m$
 $\alpha = 36'86^\circ$

$$K_1 = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3} & 0 & 0 & -\frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{L^3} & 0 & 0 & \frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} \\ 0 & \frac{3EI}{L^2} & 0 & 0 & -\frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{c} K_{11} \\ K_{21} \end{array} \quad \begin{array}{c} K_{12} \\ K_{22} \end{array}$$

$$\frac{EA}{L} = \frac{15000}{5} = 3000$$

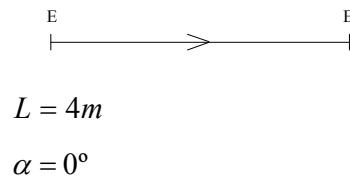
$$\frac{3EI}{L} = \frac{3 \cdot 6000}{5} = 3600$$

$$\frac{3EI}{L^2} = \frac{3 \cdot 6000}{5^2} = 720$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} 3000 & 0 & 0 & -3000 & 0 & 0 \\ 0 & 144 & 0 & 0 & -144 & 720 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3000 & 0 & 0 & 3000 & 0 & 0 \\ 0 & -144 & 0 & 0 & 144 & -720 \\ 0 & 720 & 0 & 0 & -720 & 3600 \end{bmatrix}$$

$$\frac{3EI}{L^3} = \frac{3 \cdot 6000}{5^3} = 144$$

Barra 2:



$$K_2 = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{array}{c} K_{22} \\ \hline K_{32} \end{array} \begin{array}{c} K_{23} \\ \hline K_{33} \end{array}$$

$$\frac{EA}{L} = \frac{15000}{4} = 3750$$

$$\frac{2EI}{L} = \frac{2 \cdot 6000}{4} = 3000$$

$$\frac{4EI}{L} = \frac{4 \cdot 6000}{4} = 6000$$

$$\frac{6EI}{L^2} = \frac{6 \cdot 6000}{4^2} = 2250$$

$$\frac{12EI}{L^3} = \frac{12 \cdot 6000}{4^3} = 1125$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 3750 & 0 & 0 & -3750 & 0 & 0 \\ 0 & 1125 & 2250 & 0 & -1125 & 2250 \\ 0 & 2250 & 6000 & 0 & -2250 & 3000 \\ -3750 & 0 & 0 & 3750 & 0 & 0 \\ 0 & -1125 & -2250 & 0 & 1125 & -2250 \\ 0 & 2250 & 3000 & 0 & -2250 & 6000 \end{bmatrix}$$

Barra 3:

Barra 4:



$$K_3 = K_4 = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} K_{33} \\ \hline K_{43} \end{array} \begin{array}{c} K_{34} \\ \hline K_{44} \end{array} \begin{array}{c} K_{53} \\ \hline K_{35} \end{array} \begin{array}{c} K_{55} \\ \hline K_{33} \end{array}$$

$$\frac{EA}{L} = \frac{15000}{3} = 5000$$

$$\frac{2EI}{L} = \frac{2 \cdot 6000}{3} = 4000$$

$$\frac{4EI}{L} = \frac{4 \cdot 6000}{3} = 8000$$

$$\frac{6EI}{L^2} = \frac{6 \cdot 6000}{3^2} = 4000$$

$$K_3 = K_4 = \begin{bmatrix} 5000 & 0 & 0 & -5000 & 0 & 0 \\ 0 & 2666.66 & 4000 & 0 & -2666.66 & 4000 \\ 0 & 4000 & 8000 & 0 & -4000 & 4000 \\ -5000 & 0 & 0 & 5000 & 0 & 0 \\ 0 & -2666.66 & -4000 & 0 & 2666.66 & -4000 \\ 0 & 4000 & 4000 & 0 & -4000 & 8000 \end{bmatrix}$$

$$\frac{12EI}{L^3} = \frac{12 \cdot 6000}{3^3} = 2666.66$$

2.2. Construcción de las Matrices de Transformación.

para la BARRA 1:

$$T_1 = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha & 0 \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.6 & 0 \\ 0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \alpha = 36'86^\circ$$

para la BARRA 2:

$$T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \alpha = 0^\circ$$

para la BARRA 3 y para la BARRA 4:

$$T_3 = T_4 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \alpha = 90^\circ$$

2.3. Construcción de las Matrices k-barra en Coordenadas Globales.

Se deberá realizar separando cada matriz de barra en las cuatro submatrices que la componen, y multiplicando cada una de ellas por la matriz de transformación correspondiente, que hemos hallado anteriormente.

$$[K]_G = [T] \cdot [K]_L \cdot [T]^T$$

BARRA 1: $\alpha = 36'86^\circ$

$$\begin{bmatrix} 1971.84 & 1370.88 & 0 & -1971.84 & -1370.88 & -432 \\ 1370.88 & 1172.16 & 0 & -1370.88 & -1172.16 & 576 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1971.84 & -1370.88 & 0 & 1971.84 & 1370.88 & 432 \\ -1370.88 & -1172.16 & 0 & 1370.88 & 1172.16 & -576 \\ -432 & 576 & 0 & 432 & -576 & 3885.84 \end{bmatrix}$$

BARRA 2: $\alpha = 0^\circ$

$K'_2 = K_2$, ya que el ángulo es de 0° .

BARRA 3 y BARRA 4: $\alpha = 90^\circ$



CENTRO DE ESTUDIOS UNIVERSITARIOS

ERASMUS
web

Método Matricial de las Rigideces

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2666.66 & 0 & 4000 & -2666.66 & 0 & -4000 \\ 0 & 5000 & 0 & 0 & -5000 & 0 \\ -4000 & 0 & 8000 & 4000 & 0 & 4000 \\ \hline -2666.66 & 0 & 4000 & 2666.66 & 0 & 4000 \\ 0 & -5000 & 0 & 0 & 5000 & 0 \\ -4000 & 0 & 4000 & 4000 & 0 & 8000 \end{array} \right]$$



VALENCIA

C/ RAMÓN LLULL, 19 · BAJO · TEL.: 96 339 25 49



TODOS UN EQUIPO PARA
AYUDARTE A APROBAR

BURJASSOT

TEL.: 96 363 76 62 · C/ PASSEIG DE RAJOLAR, 6

Siendo por lo tanto, la matriz de rigidez de toda la estructura en coordenadas GLOBALES:

1971.84	1370.88	0	-1971.84	-1370.88	-432										
1370.88	1172.16	0	-1370.88	-1172.16	576		0			0					0
0	0	0	0	0	0										
-1971.84	-1370.88	0	5721.84	1370.88	432	-3750	0	0							
-1370.88	-1172.16	0	1370.88	2297.16	1674	0	-1125	2250		0					0
-432	576	0	432	1674	9600	0	-2250	3000							
			-3750	0	0	9083.34	0	0	-2666.66	0	-4000	-2666.66	0	4000	
	0		0	-1125	-2250	0	11125	-2250	0	-5000	0	0	-5000	0	
			0	2250	3000	0	-2250	22000	4000	0	4000	-4000	0	4000	
						-2666.66	0	4000	2666.66	0	4000				
	0			0		0	-5000	0	0	5000	0				0
						-4000	0	4000	4000	0	8000				
						2666.66	0	-4000				2666.66	0	4000	
	0			0		0	-5000	0		0		0	5000	0	
						4000	0	4000				4000	0	8000	

Eliminando las filas y columnas correspondientes a los elementos nulos del vector de desplazamientos, nos quedaremos con lo que habitualmente denominamos k' pequeña.

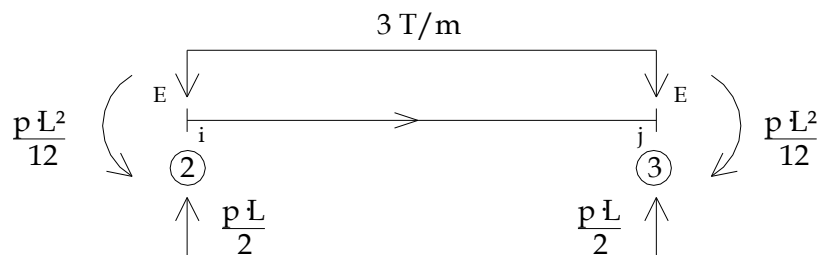
3º Vectores de Empotramiento Perfecto:

Según se nos pide en la resolución del problema, este calculo lo vamos a realizar inicialmente obteniendo los correspondientes vectores de empotramiento perfecto en coordenadas LOCALES, para posteriormente realizar una transformación de coordenadas a GLOBALES.

Barra 2:

$$L = 4\text{m}$$

$$\alpha = 0^\circ$$

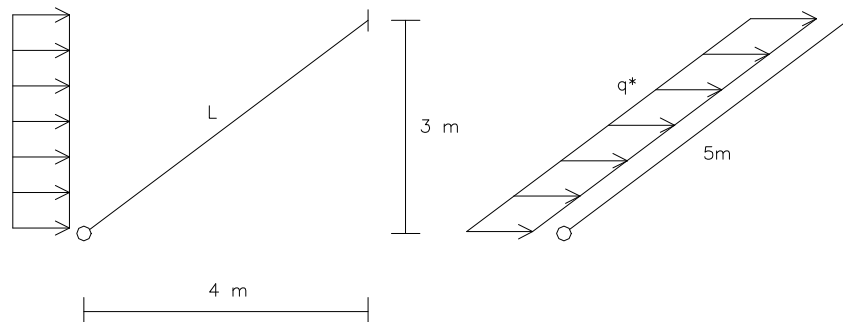


$$\frac{p \cdot L^2}{12} = \frac{3 \cdot 4^2}{12} = 4$$

$$\frac{p \cdot L}{2} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$$

$$(\alpha = 0) \quad [Q^e]_2 = [Q^{e_i}]_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} \quad [Q^e]_3 = [Q^{e_j}]_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Barra 1:



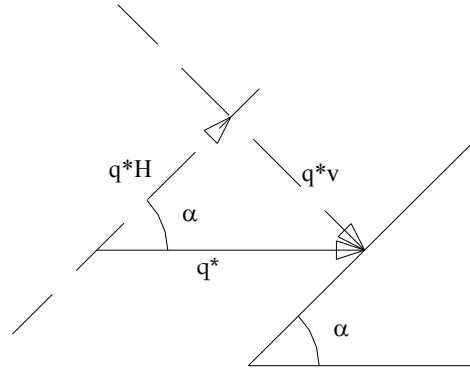
$$3\text{m} \cdot 4 \text{ T/m} = 5\text{m} \cdot q^*$$

$$q^* = 12/5 = 2.4 \text{ T/m}$$

$$\alpha = 36.86^\circ$$

$$\text{sen } \alpha = 0.6$$

$$\text{cos } \alpha = 0.8$$



$$q^*_{H} = q^*_{//} = q^* \cdot \cos \alpha = 2.4 \cdot 0.8 = 1.92 \text{ T/m}$$

$$q_H = q_{//} = 1.92$$

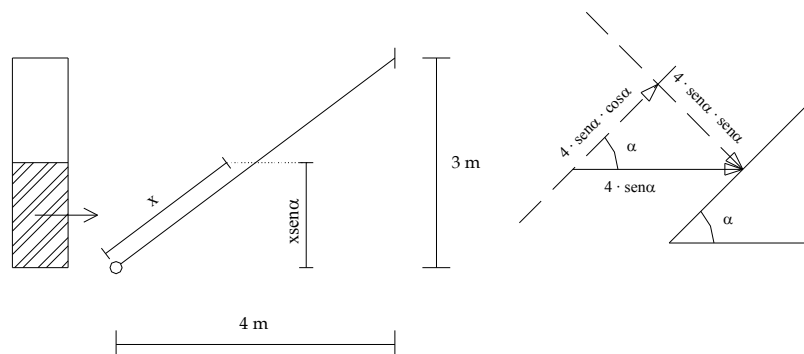
T/m

$$q^*_{V} = q^*_{\perp} = q^* \cdot \sin \alpha = 2.4 \cdot 0.6 = 1.44 \text{ T/m}$$

$$q_V = q_{\perp} = 1.44$$

T/m

2ª FORMA:



$$q_V = q_{\perp} = 4 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \alpha = 4 \cdot 0.6 \cdot 0.6 = 1.44 \text{ T/m}$$

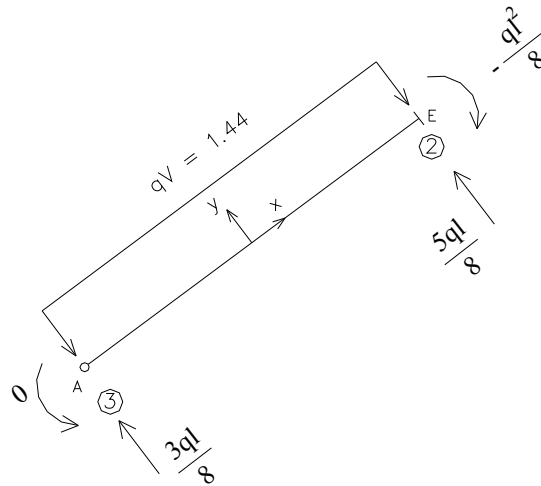
$$q_H = q_{//} = 4 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 4 \cdot 0.6 \cdot 0.8 = 1.92 \text{ T/m}$$

Vector de empotramiento perfecto debido a la carga q_V

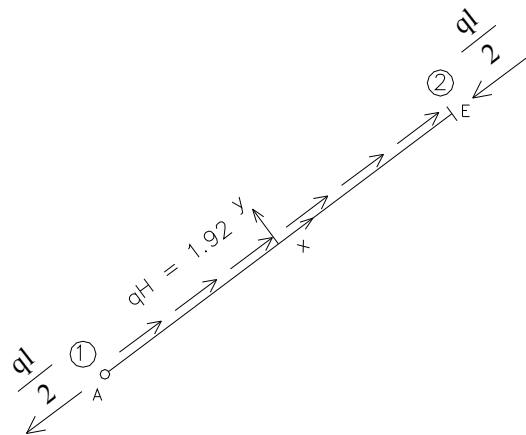
$$\frac{q_V \cdot L^2}{8} = \frac{1.44 \cdot 5^2}{8} = 4.5$$

$$\frac{5 \cdot q_V \cdot L}{8} = \frac{5 \cdot 1.44 \cdot 5}{8} = 4.5$$

$$\frac{3 \cdot q_V \cdot L}{8} = \frac{3 \cdot 1.44 \cdot 5}{8} = 2.7$$



Vector de empotramiento perfecto debido a la carga q_H



$$\frac{q_H \cdot L}{2} = \frac{1.92 \cdot 5}{2} = 4.8$$

M.E.P. TOTAL en cada nudo en COORDENADAS LOCALES:

$$[Q^e_1] = \begin{bmatrix} 0 \\ 2.7 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4.8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.8 \\ 2.7 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[Q^e_2] = \begin{bmatrix} 0 \\ 4.5 \\ -4.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4.8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.8 \\ 4.5 \\ -4.5 \end{bmatrix}$$

Transformación a coordenadas globales.

Barra 1:

$$\alpha = 36.869^\circ \quad \text{sen } \alpha = 0.6 \quad \text{cos } \alpha = 0.8$$

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\text{sen} \alpha & 0 \\ \text{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.6 & 0 \\ 0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[Q^{e'}_1] = [T] [Q^e_1] = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.6 & 0 \\ 0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4.8 \\ 2.7 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.46 \\ -0.72 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[Q^{e'}_2] = [T] [Q^e_2] = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.6 & 0 \\ 0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4.8 \\ 4.5 \\ -4.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6.54 \\ 0.72 \\ -4.5 \end{bmatrix}$$

4º Cálculo de movimientos:

$$[Q'] = [K]_G \cdot [\delta'] + [Qe']$$

Habiendo quitado las filas y columnas correspondientes a los movimientos nulos, se obtiene la matriz k' pequeña, que nos permite calcular los movimientos incógnitas de nuestra estructura.

$$\begin{bmatrix} 1971.84 & -1971.84 & -1370.88 & -432 & 0 & 0 & 0 \\ -1971.84 & 5721.84 & 1370.88 & 432 & -3750 & 0 & 0 \\ -1370.88 & 1370.88 & 2297.16 & 1674 & 0 & -1125 & 2250 \\ -432 & 432 & 1674 & 9600 & 0 & -2250 & 3000 \\ 0 & -3750 & 0 & 0 & 9083.34 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1125 & -2250 & 0 & 11125 & -2250 \\ 0 & 0 & 2250 & 3000 & 0 & -2250 & 22000 \end{bmatrix}$$

El sistema de ecuaciones lineales a resolver será por lo tanto:



$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1971.84 & -1971.84 & -1370.88 & -432 & 0 & 0 & 0 \\ -1971.84 & 5721.84 & 1370.88 & 432 & -3750 & 0 & 0 \\ -1370.88 & 1370.88 & 2297.16 & 1674 & 0 & -1125 & 2250 \\ -432 & 432 & 1674 & 9600 & 0 & -2250 & 3000 \\ 0 & 0 & 0 & -3750 & 0 & 0 & 9083.34 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1125 & -2250 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2250 & 3000 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta_x^1 \\ \Delta_x^2 \\ \Delta_y^2 \\ \theta_z^2 \\ \Delta_x^3 \\ \Delta_y^3 \\ \theta_z^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5.46 \\ -6.54 \\ 0.72 \\ -4.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 4 \\ 0 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta_x^1 \\ \Delta_x^2 \\ \Delta_y^2 \\ \theta_z^2 \\ \Delta_x^3 \\ \Delta_y^3 \\ \theta_z^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.515 \cdot 10^{-3} \\ 5.449 \cdot 10^{-3} \\ -4.025 \cdot 10^{-3} \\ 4.344 \cdot 10^{-4} \\ 2.249 \cdot 10^{-3} \\ -7.688 \cdot 10^{-4} \\ 4.556 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix}$$

5º Leyes de solicitaciones de todas las barras, dibujando a estima los correspondientes diagramas:

Para calcular las solicitaciones, hemos de trabajar en locales.

$$Q_i = k_{ii} \cdot q_i + k_{ij} \cdot q_j + Q_i^e$$

Barra 1:

$$[q_1] = [T_1]^T \cdot [q'_1] = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 & 0 \\ -0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot [q'_1] = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 & 0 \\ -0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5.515 \cdot 10^{-3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.412 \cdot 10^{-3} \\ -3.309 \cdot 10^{-3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[q_2] = [T_1]^T \cdot [q'_2] = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 & 0 \\ -0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot [q'_2] = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 & 0 \\ -0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5.449 \cdot 10^{-3} \\ -4.025 \cdot 10^{-3} \\ 4.344 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.944 \cdot 10^{-3} \\ -6.489 \cdot 10^{-3} \\ 4.344 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix}$$

$$[Q^e]_1 = \begin{bmatrix} -4.8 \\ 2.7 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[Q^e]_2 = \begin{bmatrix} -4.8 \\ 4.5 \\ -4.5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3000 & 0 & 0 & -3000 & 0 & 0 \\ 0 & 144 & 0 & 0 & -144 & 720 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3000 & 0 & 0 & 3000 & 0 & 0 \\ 0 & -144 & 0 & 0 & 144 & -720 \\ 0 & 0 & 720 & 0 & 0 & -720 & 3600 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4.412 \cdot 10^{-3} \\ -3.309 \cdot 10^{-3} \\ 0 \\ 1.944 \cdot 10^{-3} \\ -6.489 \cdot 10^{-3} \\ 4.344 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4.8 \\ 2.7 \\ 0 \\ -4.8 \\ 4.5 \\ -4.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.61 \\ 3.47 \\ 0 \\ -12.2 \\ 3.73 \\ -0.65 \end{bmatrix}$$

Barra 2: $\alpha = 0^\circ$

$$[q_2] = [q'_2] = \begin{bmatrix} 5.449 \cdot 10^{-3} \\ -4.025 \cdot 10^{-3} \\ 4.344 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix} \quad [q_3] = [q'_3] = \begin{bmatrix} 2.249 \cdot 10^{-3} \\ -7.688 \cdot 10^{-4} \\ 4.556 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix}$$

$$[Q^e]_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$[Q^e]_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} N_2 \\ V_2 \\ M_2 \\ N_3 \\ V_3 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3750 & 0 & 0 & -3750 & 0 & 0 \\ 0 & 1125 & 2250 & 0 & -1125 & 2250 \\ 0 & 2250 & 6000 & 0 & -2250 & 3000 \\ -3750 & 0 & 0 & 3750 & 0 & 0 \\ 0 & -1125 & -2250 & 0 & 1125 & -2250 \\ 0 & 2250 & 3000 & 0 & -2250 & 6000 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5.449 \cdot 10^{-3} \\ -4.025 \cdot 10^{-3} \\ 4.344 \cdot 10^{-4} \\ 2.249 \cdot 10^{-3} \\ -7.688 \cdot 10^{-4} \\ 4.556 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \\ 0 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 4.34 \\ 0.65 \\ -12 \\ 7.66 \\ -7.29 \end{bmatrix}$$

Barra 3: $\alpha = 90^\circ$

$$[q_3] = [T_3]^T \cdot [q'_3] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot [q'_3] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2.249 \cdot 10^{-3} \\ -7.688 \cdot 10^{-4} \\ 4.556 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7.688 \cdot 10^{-4} \\ -2.249 \cdot 10^{-3} \\ 4.556 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix}$$

$$[q_4] = [T_3]^T \cdot [q'_4] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot [q'_4] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[Q^e_3]_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad [Q^e_4]_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} N_3 \\ V_3 \\ M_3 \\ N_4 \\ V_4 \\ M_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5000 & 0 & 0 & -5000 & 0 & 0 \\ 0 & 2666.66 & 4000 & 0 & -2666.66 & 4000 \\ 0 & 4000 & 8000 & 0 & -4000 & 4000 \\ -5000 & 0 & 0 & 5000 & 0 & 0 \\ 0 & -2666.66 & -4000 & 0 & 2666.66 & -4000 \\ 0 & 4000 & 4000 & 0 & -4000 & 8000 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -7.688 \cdot 10^{-4} \\ -2.249 \cdot 10^{-3} \\ 4.556 \cdot 10^{-4} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.84 \\ -4.17 \\ -5.35 \\ 3.84 \\ 4.17 \\ -7.17 \end{bmatrix}$$

Barra 4: $\alpha = 90^\circ$

$$[q_5] = [T_4]^T \cdot [q'_5] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot [q'_5] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

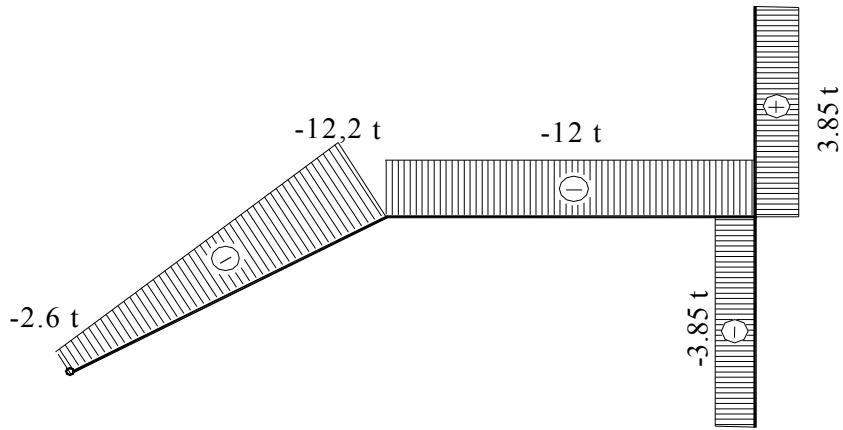
$$[q_3] = [T_4]^T \cdot [q'_3] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot [q'_3] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2.249 \cdot 10^{-3} \\ -7.688 \cdot 10^{-4} \\ 4.556 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7.688 \cdot 10^{-4} \\ -2.249 \cdot 10^{-3} \\ 4.556 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix}$$

$$[Q^e_5]_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad [Q^e_3]_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

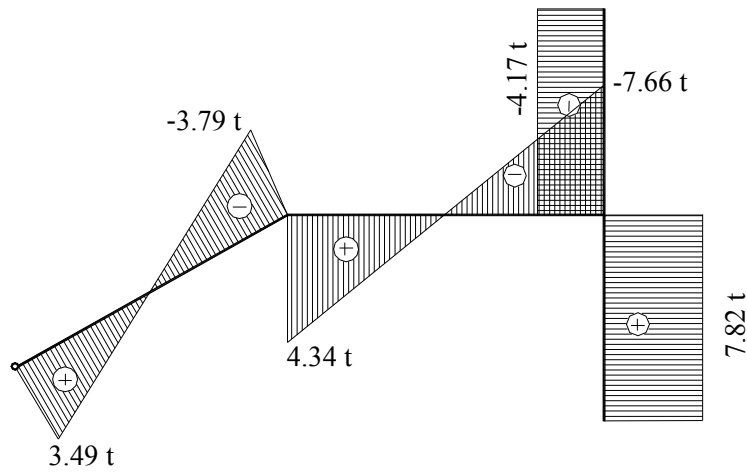
$$\begin{bmatrix} N_5 \\ V_5 \\ M_5 \\ N_3 \\ V_3 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5000 & 0 & 0 & -5000 & 0 & 0 \\ 0 & 2666.66 & 4000 & 0 & -2666.66 & 4000 \\ 0 & 4000 & 8000 & 0 & -4000 & 4000 \\ -5000 & 0 & 0 & 5000 & 0 & 0 \\ 0 & -2666.66 & -4000 & 0 & 2666.66 & -4000 \\ 0 & 4000 & 4000 & 0 & -4000 & 8000 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -7.688 \cdot 10^{-4} \\ -2.249 \cdot 10^{-3} \\ 4.556 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.84 \\ 7.82 \\ 10.82 \\ -3.84 \\ -7.82 \\ 12.64 \end{bmatrix}$$

Siendo los diagramas de solicitaciones los siguientes:

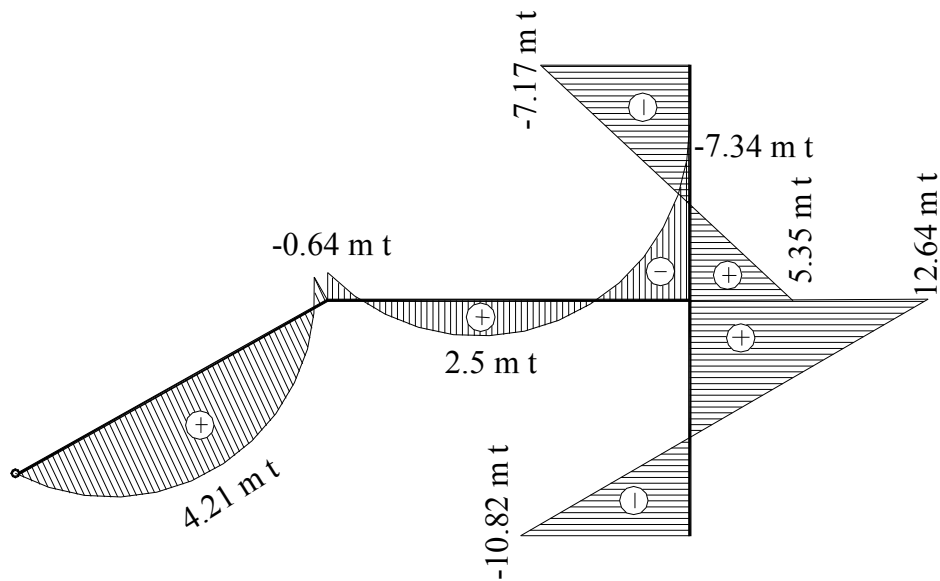
AXILES:



CORTANTES:



FLECTORES:



Fuente: enunciados correspondientes a exámenes de diferentes años de la Universidad Politécnica de Valencia.