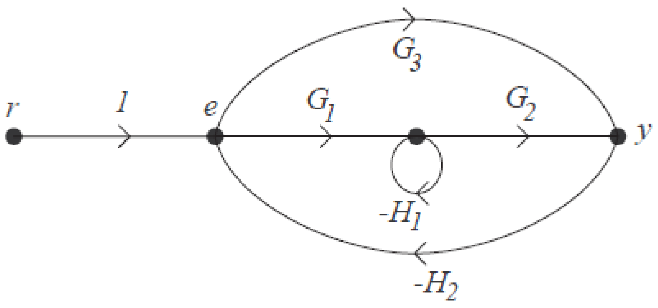
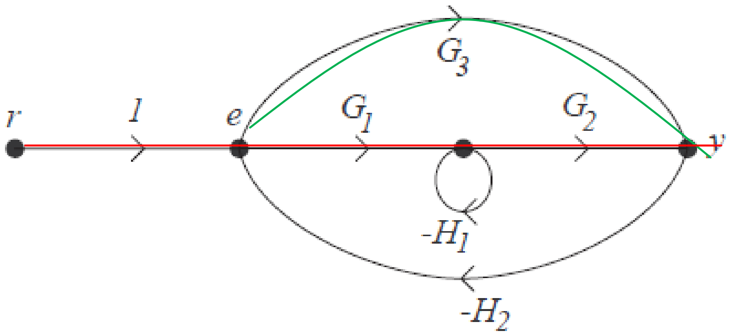
Examen de Sistemas Electrónicos de Control 5-09-08

Cuestiones

1. Obtener la función de transferencia *y/r* por simplificación del diagrama de flujo.

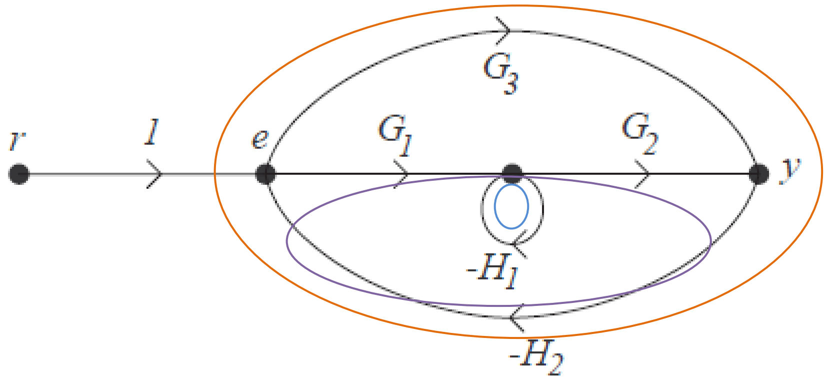


Paso 1: Determinar los trayectos directos. Trayectos que parten de la entrada, acaban en la salida y pasan por cualquiera de sus puntos una sola vez.



P1= G1·G2
P2= G3

Paso 2: Determinar los lazos. Trazos que acaban en un punto y acaban en sí mismos pasando como máximo una vez por cada punto.



L1=-H1
L2=G1·G2·(-H2)
L3=G3·(-H2)

Paso 3: Averiguar los lazos disyuntos. Lazos que entre sí no tienen ningún punto en común.

Como podemos observar L1 y L3 no tienen ningún punto en común.

Paso 4: Calcular el determinante utilizando la siguiente expresión:

$$\Delta = 1 - \sum Li + \sum_{Li,Lj\ disyuntos} Li \cdot Lj$$

$$\Delta = 1 - L1 - L2 - L3 + L1 \cdot L3 = 1 + H1 + H2 \cdot G1 \cdot G2 + H2 \cdot G3 + H1 \cdot H2 \cdot G3$$

Paso 5: Calcular los cofactores de los trayectos directos obtenidos anteriormente. Los cofactores se obtienen a partir del determinante anteriormente calculado, anulando los lazos que tienen puntos en común con los lazos directos correspondientes.

Cofactor del trayecto directo P1. Todos los lazos tocan a este trayecto directo.

$\Delta 1 = 1$

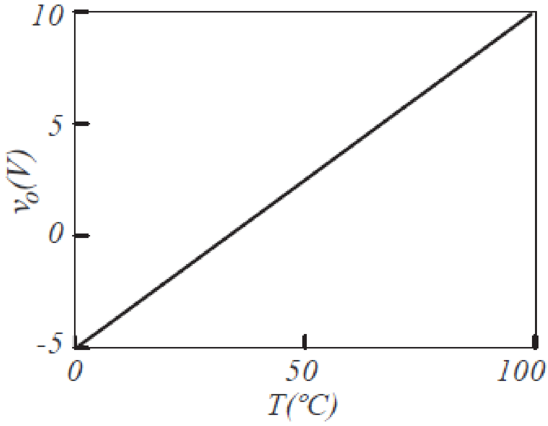
Cofactor del trayecto directo P2. L1 no toca a este trayecto directo.

$\Delta 2 = 1 - L1 = 1 + H1$

Paso 6: Aplicar la Fórmula de Mason.

$$F = \frac{y}{r} = \frac{1}{\Delta}\sum_k \Delta k \cdot Pk = \frac{G1 \cdot G2 + G3(1 + H1)}{1 + H1 + H2 \cdot G1 \cdot G2 + H2 \cdot G3 + H1 \cdot H2 \cdot G3}$$

Se ha diseñado un control de tipo 1. La característica de transferencia del sensor utilizado es la que se muestra en la figura. ¿Cuánto vale la ganancia H de pequeña señal asociada al sensor? Si la referencia es constante de 2V, ¿cuál es el valor de la salida del sistema?



Al ser la curva de respuesta del sensor una recta, la ganancia de dicho sensor se puede averiguar fácilmente obteniendo la pendiente de dicha recta. Utilizando las propiedades de la trigonometría es fácil demostrar que esta ganancia es:

$$G = \frac{Intervalo\ de\ V\ (V)}{Intervalo\ de\ T\ (ºC)} = \frac{10 - (-5)\ (V)}{100 - 0\ (ºC)} = 0{,}15\ V/ºC$$

Para obtener la salida del sistema ante una entrada constante hay que tener en cuenta que el sistema es tipo 1. Tales sistemas tienen un error de posición (correspondiente al error que se produce ante una entrada constante) nulo. De esta consideración se puede extraer que la tensión a la salida del sensor es de 2V.

Ahora sólo hace falta extraer de la curva del sensor cuál es la temperatura que proporciona a la salida del sensor 2V. Fácilmente se puede extraer que la ecuación de la recta que describe el funcionamiento del sensor es:

$$V\ (V) = T\ (ºC) \cdot G\left(\frac{V}{ºC}\right) - 5\ (V)$$

Despejando de esta ecuación obtenemos que la temperatura correspondiente es de 46,6ºC.

Se ha diseñado el compensador:

$$G_c(z) = \frac{0{,}2z - 0{,}16}{z - 1}$$

y se sabe que será necesario utilizar un prefiltro. Escribe la rutina de interrupción que debería programarse para implementar el control digital.

Primero habrá que calcular el prefiltro, cuya ecuación es simple de calcular a partir del cero del sistema, que corresponde con zc=0,16/0,2=0,8

$$Gp\ (z) = \left(\frac{1 - zc}{z - zc}\right) = \left(\frac{0.2}{z - 0.8}\right)$$

Ahora se obtiene las ecuaciones en diferencias correspondientes al prefiltro y al compensador.

$$Gp\ (z) = \frac{R'(z)}{R(z)} = \left(\frac{0.2}{z - 0.8}\right)$$

$$\frac{R'(z)}{R(z)} = \left(\frac{0.2z^{-1}}{1 - 0.8z^{-1}}\right)$$

$$R'(z)(1 - 0.8z^{-1}) = R(z) \cdot 0.2z^{-1}$$

$$r'(k) = 0.2r(k-1) + 0.8r'(k-1) \quad \textbf{(1)}$$

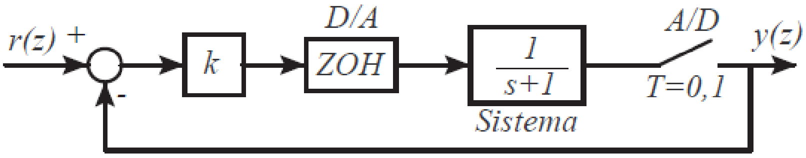
De manera análoga:

$$u(k) = 0.2e(k) - 0.16e(k-1) + u(k-1) \quad \textbf{(2)}$$

Una vez obtenidas las ecuaciones en diferencias se aplica siempre el mismo algoritmo:

Adquirir r(k) y Hy(k)
Calcular r'(k) con la ecuación en diferencias (1)
Calcular e(k)=r'(k)-Hy(k)
Calcular u(k) con la ecuación en diferencias (2)
Sacar u(k) por el convertidor D/A del microcontrolador.
Almacenar las variables r(k-1)=r(k), r'(k-1)=r'(k), e(k-1)=e(k), u(k-1)=u(k)

Calcular el valor máximo de k (kmáx) posible siendo el sistema estable en lazo cerrado. Si k=kmáx/10, determina el ts y Mp de la salida ante un escalón en r.



Como nos encontramos ante un sistema con parte analógica y con parte digital, pasaremos todos los miembros a digital utilizando la transformada Z y después aplicaremos algún criterio de estabilidad de sistemas digitales.

La transformada Z del sistema analógico es:

$$\frac{1}{s+1} \leftrightarrow \frac{1}{1}\frac{1-\exp(-T)}{z-\exp(-T)} = \frac{0{,}0952}{z-0{,}9048}$$

Es fácil determinar el polinomio característico 1+GH(z)=0 como:

z-0,9048+k(0,0952)=0

Como estamos en un sistema de primer orden es muy fácil averiguar los polos del sistema resolviendo las raíces del polinomio anterior, que son:

Zroots=0,948-k0,0952

Teniendo en cuenta que los polos del sistema en lazo cerrado (soluciones del polinomio anterior) han de estar dentro de la circunferencia unidad.

0,0948-k0,0952 > -1
k<20

Ahora, tomando k como valor 2, tenemos que el polo está ubicado en z=0,7144

Es fácil determinar que el módulo de este número complejo su fase es igual al wd·T y que su módulo es igual a exp(-σT).

Al ser la fase 0, wd es igual a 0 y el sobreimpulso también es nulo.

Con respecto al tiempo de establecimiento, con las ecuaciones anteriormente enunciadas y con su relación con dicha magnitud (Ts=4/σ) es sencillo averiguar que es de 1,16.

Problema

Dado un sistema con función de transferencia:

$$G_s(s) = \frac{10}{(s+1)(1+s/100)}$$

Con una ganancia de realimentación H=0,1.

a) Diseña, sobre el lugar de las raíces, un compensador PI analógico de forma que ts=0.2s, Mp=5%.

El proceso de diseño para este tipo de problemas es siempre similar:

Paso 1: Obtener el polo dominante del sistema de lazo cerrado a partir de las condiciones de diseño.

$$s_{PD} = -\sigma \pm j w_d$$

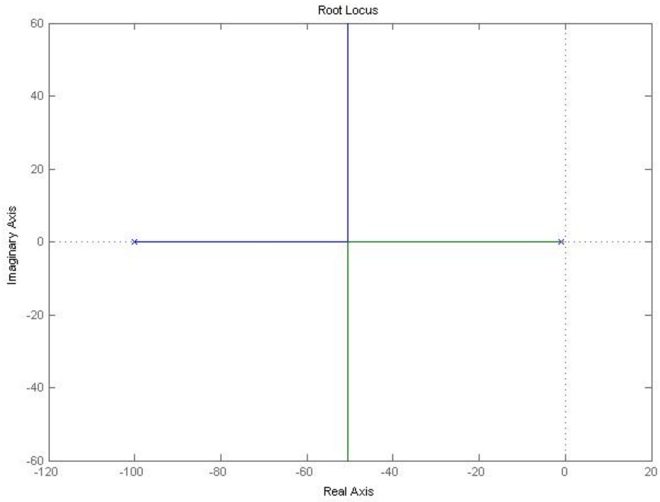
$$\sigma = \frac{4}{Ts} = -20\, rad/s$$

$$Mp = e^{\frac{-\pi w_d}{\sigma}} \rightarrow w_d = 21\, rad/s$$

$$s_{PD} = -20 \pm 21\, rad/s$$

Paso 2: Diseñar el compensador para hacer que el lugar de las raíces "pase" por el polo dominante anteriormente obtenido. Para ello añadiremos el compensador propuesto a la ganancia de lazo del sistema y posteriormente diseñaremos para que el polo obtenido pertenezca al Lugar de las Raíces.
Aunque el diseño habitual se hace matemáticamente, se realizará un diseño utilizando MATLAB para ilustrar el diseño realizado en el examen práctico de la asignatura.
Primero obtenemos la ganancia de lazo sin incluir el compensador y dibujamos su lugar de las raíces correspondiente:

$$GsH(s) = \frac{1}{(s+1)(1+\frac{s}{100})}$$

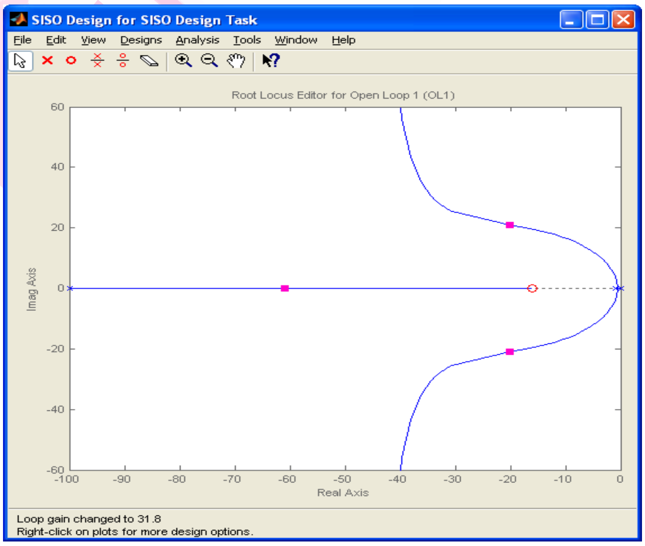


Paso 3: Ahora añadiremos el compensador paulatinamente, primero el polo en s=0 ya que esta condición es fija.

$$GsH(s) = \frac{1}{(s+1)(1+\frac{s}{100})}$$

Paso 4: Posteriormente añadiremos el cero del compensador PI y haremos que se cumpla la condición del argumento: la fase de la ganancia de lazo del sistema en el polo dominante debe ser igual a -180º.

Esta condición se puede cumplir diseñando el cero analíticamente, pero gráficamente lo que se ha de hacer cumplir es que una de las ramas del lugar de las raíces pase por el polo dominante.



Como se puede observar se ha añadido un cero en w=-16,1 rad/s

Paso 5: Ajustamos la ganancia para que el polo dominante se ajuste al polo calculado. Esto se consigue utilizando el criterio del módulo: El módulo de la ganancia de lazo en el polo dominante es igual a uno.
El método gráfico consiste en colocar el polo dominante del gráfico en el polo deseado. Como se puede ver en el gráfico anterior, ya se ha cumplido esta condición, con una ganancia de 31,8 como se indica en la parte inferior.

Por tanto, el compensador propuesto es:

$$Gc(s) = \frac{31{,}8\,(s + 16{,}1)}{s}$$

b) Sabiendo que hay un único punto de ruptura, dibuja de forma aproximada el lugar de las raíces compensado. ¿Necesitamos un prefiltro?

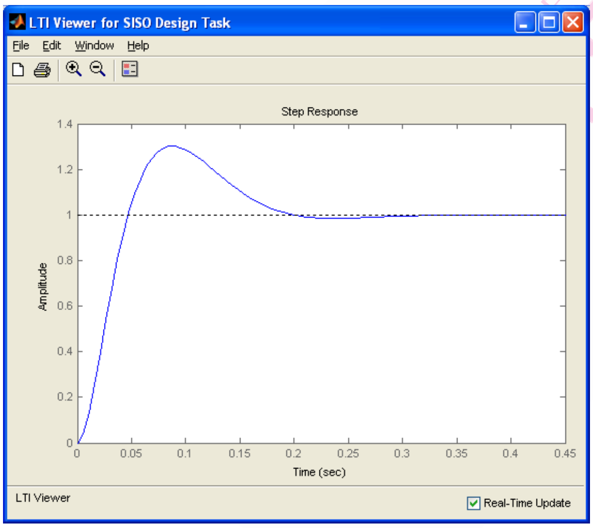
Al hacer este problema de manera gráfica ayudándonos de MATLAB la primera cuestión carece de sentido ya que está representada en la última gráfica presentada.
Con respecto al prefiltro hay que comprobar los siguientes parámetros del diseño:

- **Cero dominante de la ganancia de lazo:** situado en wz=-16.1 rad/s
- **Parte real del polo dominante de la ganancia de lazo cerrado:** -σ=-20rad/s

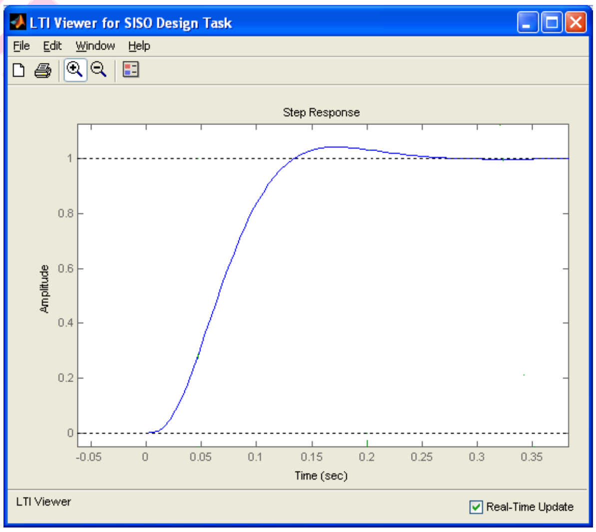
Al ser el cero más dominante que el polo, necesitamos un prefiltro. Su ecuación es siempre:

$$Gp(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{-w_{Z\,dominante}}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{s}{16.1}}$$

Observemos la respuesta al escalón de ambos sistemas, sin compensar y compensado:



Sin Prefiltro

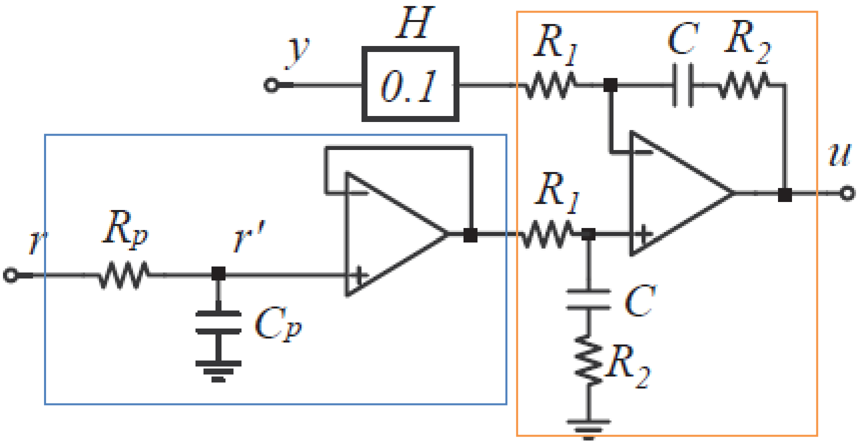


Con Prefiltro

Como se puede observar incluyendo el prefiltro se mejora sustancialmente la sobreoscilación.

c) Proponer una implementación del control con amplificadores operacionales.

Este tipo de circuitos han de conocerse de memoria y su esquema es:



Prefiltro (Red RC)
+
Seguidor de tensión

Compensador PI
+
Restador

Fuente: enunciados correspondientes a exámenes de diferentes años de la Universidad de Valencia.