ECUACIONES DIFERENCIALES
INGENIERÍA DE CAMINOS CANALES Y PUERTOS
Segundo parcial

Cuestión 1.- Demostrar que en el intervalo $]-\pi, \pi[$ es cierta la igualdad:

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen}(nx)$$

Cuestión 2.- Calcular la solución de la ecuación integrodiferencial

$$\begin{cases} y' + 5\int_0^x y\,ds = e^{-x}, \quad x \geq 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

utilizando la transformada de Laplace.

Cuestión 3.- Resolver la ecuación integral

$$y(x) = \cos(3x) + \lambda \int_0^{\pi} \cos(x+t) y(t)\,dt \text{ .}$$

Problema
Resolver la ecuación en derivadas parciales:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (x,t) \in \Re \\ u(x,0) = e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \Re \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \quad x \in \Re \end{cases}$$

SOLUCIONES

Cuestión 1

Extendemos la función x de forma periódica:
Sea f(x)=x si $x \in]-\pi, \pi[$ **,** $f(-\pi) = f(\pi) = 0$ **,** $f(x+2\pi) = f(x)\ \forall x \in \Re$ **.**

Esta función es impar y 2 π **-periódica, luego tiene un desarrollo de Fourier en serie de senos**

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(nx) \text{, con } b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\operatorname{sen}(nx)dx\ \forall n = 1,2,...$$

Calculamos los coeficientes de la serie

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\operatorname{sen}(nx)dx = \left[\begin{array}{c} \text{Integraciön por partes} \\ u = x \to du = dx \\ dv = \operatorname{sen}(nx)dx \to v = \dfrac{-\cos(nx)}{n} \end{array}\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{-x\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\cos(nx)dx = \frac{-\cos(n\pi)}{n} + \frac{2}{n\pi}\left[\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Luego $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\operatorname{sen}(nx)$

Como $f \in C_*^1[-\pi, \pi]$ **, por el teorema de la convergencia puntual (que se enunciará correctamente) sabemos que la serie obtenida es puntualmente convergente en toda la recta real. La serie convergerá a la función f en todos los puntos donde f es continua y a la semisuma de las imágenes por la izquierda y por la derecha en los puntos donde f no sea continua.**

En particular, si $x \in]-\pi, \pi[$ **, con f es continua, se tiene que:**

$$f(x) = x = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\operatorname{sen}(nx)$$

Cuestión 2

Tenemos que resolver $\begin{cases} y' + 5\int_0^x y\,ds = e^{-x}, \quad x \geq 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

Aplicamos transformada de Laplace a ambos lados de la igualdad

$$L\left(y'+5\int_0^x yds \right) = L(e^{-x})$$

Por la linealidad de la transformada tenemos:

$$L(y') + 5L\left(\int_0^x yds \right) = L(e^{-x})$$

Por teoría sabemos que:

$$L(y') = pL(y) - y(0) = pL(y)$$

$$L\left(\int_0^x yds \right) = \frac{L(y)}{p}$$

Y como $L(e^{ax}) = \frac{1}{p-a} \;\rightarrow\; L(e^{-x}) = \frac{1}{p+1}$

Así, sustituyendo en la ecuación obtenemos:

$$pL(y) + 5\frac{L(y)}{p} = \frac{1}{p+1} \;\rightarrow\; p^2L(y) + 5L(y) = \frac{p}{p+1} \;\rightarrow\; (p^2+5)L(y) = \frac{p}{p+1}$$

Luego $L(y) = \frac{p}{(p+1)(p^2+5)}$

Para encontrar la función y(x) cuya transformada de Laplace sea $\frac{p}{(p+1)(p^2+5)}$**, descomponemos esta fracción como suma de fracciones simples**

$$\frac{p}{(p+1)(p^2+5)} = \frac{A}{p+1} + \frac{Mp+N}{p^2+5} = \frac{A(p^2+5)+(Mp+N)(p+1)}{(p+1)(p^2+5)} \rightarrow$$

$$\rightarrow\; p = A(p^2+5)+(Mp+N)(p+1) = (A+M)p^2 + (M+N)p + N + 5A$$

Igualamos coeficientes

$$\left.\begin{array}{l} 0 = A+M \\ 1 = M+N \\ 0 = N+5A \end{array}\right\} \rightarrow A = \frac{-1}{6},\quad M = \frac{1}{6},\quad N = \frac{5}{6}$$

Así, $L(y) = -\frac{1}{6}\frac{1}{p+1} + \frac{1}{6}\frac{p}{p^2+5} + \frac{5}{6}\frac{1}{p^2+5}$

Como sabemos que:

$$L(e^{-x}) = \frac{1}{p+1}$$

$$L(\mathrm{sen}(ax)) = \frac{a}{p^2+a^2} \to L(\mathrm{sen}(\sqrt{5}x)) = \frac{\sqrt{5}}{p^2+5}$$

$$L(\cos(ax)) = \frac{p}{p^2+a^2} \to L(\cos(\sqrt{5}x)) = \frac{p}{p^2+5}$$

Entonces la función que buscamos es:

$$y(x) = -\frac{1}{6}e^{-x} + \frac{1}{6}\cos(\sqrt{5}x) + \frac{\sqrt{5}}{6}\mathrm{sen}(\sqrt{5}x), \quad x \geq 0.$$

Cuestión 3

La ecuación

$$y(x) = \cos(3x) + \lambda\int_0^{\pi}\cos(x+t)y(t)dt$$

es una ecuación de Fredholm con núcleo k(x,t)=cos(x+t)=cos(x)cos(t)-sen(x)sen(t).

Usaremos para resolverla el método de los núcleos degenerados (por serlo k(x,t)).

$$y(x)=\cos(3x)+\lambda\int_0^{\pi}(\cos(x)\cos(t)-\mathrm{sen}(x)\mathrm{sen}(t))y(t)dt=$$
$$=\cos(3x)+\lambda\cos(x)\int_0^{\pi}\cos(t)y(t)dt-\lambda\mathrm{sen}(x)\int_0^{\pi}\mathrm{sen}(t)y(t)dt=$$
$$=\cos(3x)+A\lambda\cos(x)-B\lambda\mathrm{sen}(x)$$

donde:

$$A=\int_0^{\pi}\cos(t)y(t)dt=\int_0^{\pi}\cos(t)(\cos(3t)+A\lambda\cos(t)-B\lambda\mathrm{sen}(t))dt=$$
$$=\int_0^{\pi}\cos(t)\cos(3t)dt+A\lambda\int_0^{\pi}\cos^2(t)dt-B\lambda\int_0^{\pi}\cos(t)\mathrm{sen}(t)dt=$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(\cos(4t)+\cos(2t))dt+\frac{A}{2}\lambda\int_0^{\pi}(1+\cos(2t))dt-B\lambda\left[\frac{\mathrm{sen}^2(t)}{2}\right]^{\pi}=$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{sen}(4t)}{4}+\frac{\mathrm{sen}(2t)}{2}\right]_0^{\pi}+\frac{A}{2}\lambda\left[t+\frac{\mathrm{sen}(2t)}{2}\right]_0^{\pi}=\frac{\lambda\pi}{2}A$$

Luego $(1-\frac{\lambda\pi}{2})A=0$

Por otra parte,

$$B=\int_0^{\pi}\mathrm{sen}(t)y(t)dt=\int_0^{\pi}\mathrm{sen}(t)(\cos(3t)+A\lambda\cos(t)-B\lambda\mathrm{sen}(t))dt=$$
$$=\int_0^{\pi}\mathrm{sen}(t)\cos(3t)dt+A\lambda\int_0^{\pi}\mathrm{sen}(t)\cos(t)dt-B\lambda\int_0^{\pi}\mathrm{sen}^2(t)dt=$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(\mathrm{sen}(4t)-\mathrm{sen}(2t))dt+A\lambda\left[\frac{\mathrm{sen}^2(t)}{2}\right]^{\pi}-\frac{B}{2}\lambda\int_0^{\pi}(1-\cos(2t))dt=$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{-\cos(4t)}{4}+\frac{\cos(2t)}{2}\right]_0^{\pi}-\frac{B}{2}\lambda\left[t-\frac{\mathrm{sen}(2t)}{2}\right]_0^{\pi}=-\frac{\lambda\pi}{2}B$$

Así $(1+\frac{\lambda\pi}{2})B=0$**.**

Por lo tanto tenemos los siguientes casos:

Si $\lambda=\frac{2}{\pi}\rightarrow$ **A=0 y B arbitrario, en este caso tenemos infinitas soluciones:**

$$y(x)=\cos(3x)-\frac{2B}{\pi}\mathrm{sen}(x).$$

Si $\lambda = -\frac{2}{\pi} \rightarrow$ **B=0 y A arbitrario, en este caso tenemos infinitas soluciones:**

$y(x) = \cos(3x) - \frac{2A}{\pi}\cos(x)$**.**

Si $\lambda \neq \frac{2}{\pi}$ y $\lambda \neq -\frac{2}{\pi} \rightarrow$ **A=B=0, es este caso tenemos una única solución:**

$y(x) = \cos(3x)$

Problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, & (x,t) \in \Re \\ u(x,0) = e^{-\frac{x^2}{2}}, & x \in \Re \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, & x \in \Re \end{cases}$$

Resolveremos el problema aplicando transformada de Fourier, transformada de Fourier seno o transformada de Fourier coseno a la función u respecto a una de las variables.

Como ambas variables están definidas en todos los reales aplicaremos transformada de Fourier normal.

Como las condiciones del problema vienen dadas para valores constantes de la variable t, entonces aplicaremos transformada de Fourier respecto a la variable x.

Aplicando la transformada a ambos lados de la igualdad:

$$F\left[\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right] = F\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right]$$

Denotamos

$$F[u(x,t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)e^{-i\alpha x}dx = v(\alpha,t)$$

Por teoría:

$$F[f^{(n)}(x)] = (i\alpha)^n F[f] \quad \rightarrow \quad F\left[\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right] = (i\alpha)^4 F\big[u(x,t)\big] = \alpha^4 v(\alpha,t)$$

Como transformamos respecto a la variable x, la transformada conmuta con las parciales respecto a la variable t, es decir:

$$F\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right] = \frac{\partial^2}{\partial t^2}F[(x,t)] = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(\alpha,t)$$

Por lo tanto la ecuación queda:

$$\alpha^4 v(\alpha,t) = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(\alpha,t)$$

Como $u(x,0) = e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \rightarrow \quad v(\alpha,0) = F[u(x,0)] = F\left[e^{-\frac{x^2}{2}}\right] = e^{-\frac{\alpha^2}{2}}$

Como $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial t}(\alpha,0) = \frac{\partial}{\partial t}F[u(x,0)] = F\left[\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)\right] = F[0] = 0$

En la ecuación solo aparecen derivadas respecto a t, fijamos la variable α **y denotamos** $v_\alpha(t) = v(\alpha,t)$ **, así tenemos la ecuación:**

$$\alpha^4 v_\alpha(t) = v_\alpha''(t) \quad \rightarrow \quad v_\alpha''(t) - \alpha^4 v_\alpha(t) = 0$$

que es una ecuación diferencial ordinaria de orden 2 lineal, homogénea y de coeficientes constantes.

La ecuación característica asociada es $r^2 - \alpha^4 = 0$

Si $\alpha = 0 \;\rightarrow$ **r=0 doble** $\rightarrow$ **el conjunto fundamental de soluciones es {1, t} y la solución general de la ecuación es**

$v_\alpha(t) = A_1 + B_1 t$

Si $\alpha \neq 0 \;\rightarrow\; r = \pm\alpha^2$ **raíces reales simples** $\rightarrow$ **el conjunto fundamental de soluciones es** $\left\{e^{\alpha^2 t}, e^{-\alpha^2 t}\right\}$ **y la solución general de la ecuación es**

$v_\alpha(t) = A_2 e^{\alpha^2 t} + B_2 e^{-\alpha^2 t}$

Si variamos ahora α **obtenemos:**

$$v(\alpha,t) = \begin{cases} A_1(0) + B_1(0)t, & \text{si } \alpha = 0 \\ A_2(\alpha)e^{\alpha^2 t} + B_2(\alpha)e^{-\alpha^2 t}, & \text{si } \alpha \neq 0 \end{cases}$$

Aplicamos las condiciones que tenemos sobre la función $v(\alpha,t)$

$$v(\alpha,0) = e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \;\rightarrow\; \begin{cases} A_1(0) = 1 \\ A_2(\alpha) + B_2(\alpha) = e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \end{cases}$$

Como $\dfrac{\partial v}{\partial t}(\alpha,t) = \begin{cases} B_1(0), & \text{si } \alpha = 0 \\ \alpha^2 A_2(\alpha)e^{\alpha^2 t} - \alpha^2 B_2(\alpha)e^{-\alpha^2 t}, & \text{si } \alpha \neq 0 \end{cases}$

Tenemos

$$\frac{\partial v}{\partial t}(\alpha,0) = 0 \rightarrow \begin{cases} B_1(0) = 0 \\ \alpha^2 A_2(\alpha) - \alpha^2 B_2(\alpha) = 0 \rightarrow A_2(\alpha) = B_2(\alpha) = \dfrac{1}{2}e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \end{cases}$$

Así finalmente

$$v(\alpha,t) = \left\{\begin{matrix} 1 & , \;\text{si } \alpha = 0 \\ \dfrac{1}{2}e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\left(e^{\alpha^2 t} + e^{-\alpha^2 t}\right), & \text{si } \alpha \neq 0 \end{matrix}\right\} = e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\cosh(\alpha^2 t), \;\; \forall \alpha \in \Re$$

Para obtener la solución u(x,t) del problema original simplemente aplicaremos transformada inversa de Fourier a $v(\alpha,t)$**, obtenemos:**

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} v(\alpha,t)e^{i\alpha x}d\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\cosh(\alpha^2 t)e^{i\alpha x}d\alpha$$

Fuente: enunciados correspondientes a exámenes de diferentes años de la Universidad Politécnica de Valencia.