

EXAMEN de
FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS PARA EL ESTUDIO DEL MEDIO AMBIENTE
2º parcial
(1º CC. AMBIENTALES)

- Define los conceptos de máximo y mínimo relativo para una función de varias variables. Da una condición suficiente para que una función diferenciable de dos variables tenga un máximo o mínimo relativo en un punto.
 - Determina y clasifica los puntos críticos de $x^2y - 3xy + y$
- ¿Qué ecuaciones diferenciales de segundo orden son reducibles a una de primer orden? ¿Cómo se hace para resolver estas ecuaciones?
 - Determina la solución de la ecuación diferencial $y'' + y' + y = \sin(2x)$ que verifica las condiciones iniciales $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$.
- ¿Qué es un campo conservativo? Da una condición necesaria y suficiente para que un campo vectorial definido sobre un conjunto simplemente conexo de \mathbb{R}^2 (respectivamente, de \mathbb{R}^3) sea conservativo.
 - Calcula $\int_c X \, dc$ siendo $X = (yz, xz, xy)$ y $c(t) = (\cos^2 t, \sin(2t), \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.



Problema 1

a) Sea $f: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ una función y sea $p \in \mathfrak{R}^n$.

p es un máximo de f si $\exists r > 0: f(p) \geq f(x) \quad \forall x \in B(p, r)$

p es un mínimo de f si $\exists r > 0: f(p) \leq f(x) \quad \forall x \in B(p, r)$

Si $f: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ es diferenciable y $\text{grad}f(p) = 0$, se cumple:

$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0 \Rightarrow p$ es un mínimo de f

$\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0 \Rightarrow p$ es un máximo de f

b) $f(x, y) = x^2y - 3xy + y$ es diferenciable

$$\text{grad}f(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 3y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 3x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}, y = 0$$

Dos puntos críticos: $\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, 0\right)$ $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, 0\right)$

$$\text{Hess}f\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, 0\right) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta_1 = 0, \Delta_2 = -5 < 0 \Rightarrow \text{punto de silla}$$

$$\text{Hess}f\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, 0\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{5} \\ -\sqrt{5} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta_1 = 0, \Delta_2 = -5 < 0 \Rightarrow \text{punto de silla}$$



Problema 2

a) Ecuaciones lineales de segundo orden reducibles:

- *EDO lineal de segundo orden sin variable dependiente*

Son de la forma $F(x, y', y'') = 0$.

Se transforman en una de primer orden con el cambio de variable $p = y'$

- *EDO lineal de segundo orden sin variable independiente*

Son de la forma $F(y, y', y'') = 0$.

Se transforman en una de primer orden con el cambio:

$$p = y' \Rightarrow y'' = p' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \underbrace{\frac{dy}{dx}}_{y'} = \frac{dp}{dy} \cdot p$$

b) $y'' + y' + y = \sin(2x)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

EDO homogénea: $y'' + y' + y = 0$

$$r^2 + r + 1 = 0 \Rightarrow r = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$y_h(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \left(A \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + B \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \right)$$

Solución particular de la EDO completa:

$$\left. \begin{array}{l} y_p(x) = C \cos(2x) + D \sin(2x) \\ y'_p(x) = -2C \sin(2x) + 2D \cos(2x) \\ y_p(x) = -4C \cos(2x) - 4D \sin(2x) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} C + 2D - 4C = 0 \\ D - 2C - 4D = 1 \end{array} \right\} C = -\frac{2}{13}, D = -\frac{3}{13}$$

$$y_p(x) = -\frac{2}{13} \cos(2x) - \frac{3}{13} \sin(2x)$$

$$\text{Solución general: } y(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \left(A \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + B \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \right) - \frac{2}{13} \cos(2x) - \frac{3}{13} \sin(2x)$$



Condiciones generales:

$$0 = y(0) = A - \frac{2}{13} \Rightarrow A = \frac{2}{13}$$

$$1 = y'(0) = -\frac{1}{13} + \frac{\sqrt{3}}{2}B - \frac{6}{13} \Rightarrow B = \frac{40}{13\sqrt{3}}$$

Solución única:

$$y(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \left(\frac{2}{13} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{40}{13\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \right) - \frac{2}{13} \cos(2x) - \frac{3}{13} \sin(2x)$$



Problema 3

a) El campo vectorial $X : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$ se dice que es conservativo si existe $V : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$, llamada función potencial, que verifica $\text{grad} V = X$.

Sean $D \subseteq \mathfrak{R}^2$ simplemente conexo y el campo vectorial $X : D \rightarrow \mathfrak{R}^2$, $X = (X_1, X_2)$, se tiene que:

$$X \text{ es conservativo} \Leftrightarrow \frac{\partial X_1}{\partial y} = \frac{\partial X_2}{\partial x}$$

Sean $D \subseteq \mathfrak{R}^3$ simplemente conexo y el campo vectorial $X : D \rightarrow \mathfrak{R}^3$, $X = (X_1, X_2, X_3)$ se tiene que:

$$X \text{ es conservativo} \Leftrightarrow \frac{\partial X_1}{\partial y} = \frac{\partial X_2}{\partial x}, \frac{\partial X_1}{\partial z} = \frac{\partial X_3}{\partial x}, \frac{\partial X_2}{\partial z} = \frac{\partial X_3}{\partial y} \Leftrightarrow \text{rot } X = \vec{0}$$

b) $X = (yz, xz, xy)$ campo vectorial de $D = \mathfrak{R}^3$ que es simplemente conexo.

$$\text{rot } X = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ yz & xz & xy \end{vmatrix} = (x-x)\vec{i} - (y-y)\vec{j} + (z-z)\vec{k} = \vec{0} \Rightarrow X \text{ es conservativo}$$

La curva $c(t) = (\cos^2 t, \sin(2t), \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ es cerrada, ya que $c(0) = (1,0,0) = c(2\pi)$.

Denotando por V la función potencial de X , se cumple:

$$\int_c X \, dc = V(c(2\pi)) - V(c(0)) = 0$$

Fuente: enunciados correspondientes a exámenes de diferentes años de la Universidad de Valencia.