CUESTIONES TEÓRICAS

I. - Razonar si son verdaderas o falsas las siguientes proposiciones y/o expresiones.

"En toda operación financiera la reserva matemática por la izquierda en un momento intermedio siempre es mayor que la reserva por la derecha."

Falso: Por ejemplo, en TODA operación financiera, la reserva matemática por la izquierda coincide con la reserva por la derecha en todo momento intermedio en el que no vence ningún capital, ni de la prestación ni de la contraprestación. Además, si en dicho momento vence un capital de la prestación, la reserva por la izquierda es menor que la reserva por la derecha.

"En una operación de préstamo a tipo de interés efectivo anual constante del 2% en capitalización compuesta, el tipo efectivo de la operación pura es el mismo independientemente del tipo de préstamo elegido."

Verdadera: La definición de tipo efectivo de la operación pura es el tipo de interés efectivo anual constante en capitalización compuesta que hace equivalentes prestación (pura) y contraprestación (pura), y en esta operación de préstamo sucede que viene dada por un tipo de interés efectivo anual constante del 2% en capitalización compuesta, por lo que ése es el tipo de interés efectivo de la operación pura, el 2%, independientemente de cómo esté constituida la contraprestación por el tipo de préstamo elegido.

"Para todas las operaciones financieras el tipo efectivo de coste es siempre mayor que el de rendimiento."

Falsa: Para ***TODAS NO***, por ejemplo, para las operaciones que sólo tengan características comerciales bilaterales coincide el tipo efectivo de coste con el de rendimiento, o bien, para las operaciones financieras puras también coinciden. Tampoco se verifica es en operaciones financieras en que sólo existan ingresos unilaterales a favor del prestatario, lo que llevaría a un tipo efectivo de coste inferior al de rendimiento.

"Un préstamo de cuotas de amortización constantes y tipo de interés decreciente puede tener los términos amortizativos constantes."

Falsa: Todo término amortizativo se descompone en cuota de interés más cuota de amortización, $a_s = I_s + A_s$.

Si el préstamo es de cuotas de amortización constantes, $A_s = A > 0$, el capital vivo es decreciente, $C_s = (n-s)\,A = C_{s-1} - A$, por lo que si el tipo de interés es decreciente, i_s, la cuota de interés, $I_s = C_{s-1} i_s$, también es decreciente al resultar del producto de dos magnitudes decrecientes. Por tanto, el término amortizativo es decreciente en este caso, pues es la suma de una cuota de amortización constante y una cuota de interés decreciente.

"En una operación de descuento simple duplicando el tipo de descuento se duplica el valor descontado."

Falsa: Ya que si se duplica el tipo de descuento (d), se duplica el descuento ($D = n \cdot d \cdot C$), y el valor descontado será menor, pues se resta a C el doble, $2D = n \cdot 2d \cdot C$, valor descontado, $C_0 = C - 2D$ que es, obviamente, distinto al doble del valor descontado, $2C_0 = 2(C - D) = 2C - 2D \neq C - 2D$.

II. - Obténgase razonadamente la descomposición de los términos amortizativos de un préstamo en cuota de interés y cuota de amortización: $a_s = I_s + A_s$.

La evolución del capital vivo a lo largo de la operación se obtiene a partir del cálculo de la reserva por el método recurrente:

$$C_s = R_{s-1}^{+} u(s-1,s) + PP_s^{]s-1,s]} - CPP_s^{]s-1,s]} = C_{s-1}(1+i_s) - a_s$$

de forma que operando se llega a: $a_s = \left(C_{s-1} - C_s \right) + C_{s-1} i_s = A_s + I_s$

donde: A_s : se denomina cuota de amortización y se define como la variación sufrida por el capital vivo durante el periodo (t_{s-1},t_s).

I_s : se denomina cuota de interés del periodo (t_{s-1},t_s) y se define como el producto del capital vivo en t_{s-1} por el rédito del periodo.

a_s : es el término amortizativo, suma de las dos cuantías anteriores.

III. - Definir los siguientes conceptos.

a) Operación financiera y operación financiera posdeterminada.

Operación financiera: Todo intercambio ***no simultáneo*** de capitales financieros ***pactado*** ente dos agentes siempre que se verifique la equivalencia, en base a una ***ley financiera***, entre los capitales entregados por uno y otro.

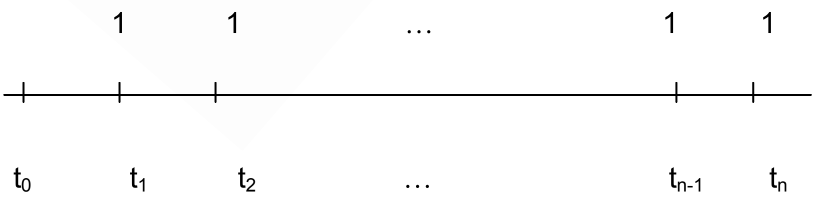
Operación financiera posdeterminada: Operación financiera en la que la cuantía y/o el vencimiento de un/os capital/es de la prestación y/o contraprestación no se conocen más que a posteriori (durante la operación o al final de la operación), y no al inicio de la operación.

b) Tanto efectivo de coste de una operación financiera.

Se denomina ***tanto efectivo real del prestatario, pasivo, o de coste***, al rédito anual o tanto efectivo anual de la ley de capitalización compuesta que verifica la equivalencia financiera entre la prestación real recibida por el prestatario y la contraprestación real entregada por éste.

IV.- Demuéstrese que el valor final de una renta de n periodos, constante de cuantía 1, pagadera al final de cada periodo y valorada a un rédito constante i es

$$\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$



$S_{\overline{n}|i} = 1 + (1+i) + (1+i)^2 + \ldots + (1+i)^{n-1} = \sum_{s=0}^{n-1} (1+i)^s$ y como nuevamente se trata de la suma de los términos de una serie de números cuya cuantía crece en progresión geométrica de primer término $a_1 = 1$, último $a_n = (1+i)^{n-1}$, y razón $r = (1+i)$, se puede escribir:

$$S_{\overline{n}|i} = \sum_{s=1}^{n} a_n = \frac{a_1 - a_n\, r}{1-r} = \frac{1-(1+i)^{n-1}(1+i)^1}{1-(1+i)^1} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Obsérvese que se verifica: $S_{\overline{n}|i} = (1+i)^n \cdot a_{\overline{n}|i}$

por ser $(1+i)^n$ el factor de capitalización del intervalo $[t_0, t_n]$.

V. – Resolver los siguientes ejercicios.

a) Una persona se compromete a entregar los capitales: {(2.000, 0), (500, 1), (1.000, 7)} a cambio de recibir {(900, 2), (300, 3), (X, 5)}. Si la ley de valoración pactada es $L(t;t_n) = (1+0{,}04)^{t_n - t}$, obténgase, *la cuantía de X*.

	0	1	2	3	4	5	6	7
P:	2.000	500						1.000
CP :			900	300		X		

Para calcular el capital que falta de la contraprestación, llevamos prestación y contraprestación al mismo momento del tiempo. Por ejemplo, a 7.

$$P_7 = CP_7$$

$$P_7 = 2.000 \cdot (1+0{,}04)^{7-0} + 500 \cdot (1+0{,}04)^{7-1} + 1.000 = 4.264'5231 \cong 4.264'52$$

$$CP_7 = 900 \cdot (1+0{,}04)^{7-2} + 300 \cdot (1+0{,}04)^{7-3} + X \cdot (1+0{,}04)^{7-5} = 1.445'9452 + X \cdot (1+0{,}04)^2$$

$$P_7 = CP_7 \Rightarrow 4.264'5231 = 1.445'9452 + X\cdot(1+0{,}04)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow X = 2.818'5779/(1'04)^2 = 2.605'9337$$

Reserva matemática en t=5 e interpretación de los resultados.

	0	1	2	3	4	5	6	7
						R_5^+ , R_5^-		
P:	2.000	500						1.000
CP :			900	300		2.605'9337		

Como se pide la reserva en t=5 y coincide con el vencimiento de un capital, se debe calcular la reserva por la izquierda y por la derecha.

$$R_5^+ = PP_5^{[0,5]} - CPP_5^{[0,5]} = 2.000\cdot(1+0'04)^{5-0} + 500\cdot(1+0'04)^{5-1} - 900\cdot(1+0'04)^{5-2} - 300\cdot(1+0'04)^{5-3} -$$
$$-2.605'9337 \cong -924'5562$$

Por el método prospectivo, los cálculos serían menores:

$R_5^+ = CPF_5^{]5,7]} - PF_5^{]5,7]} = -1.000\cdot(1+0'04)^{-(7-5)} = -924'55622$, el signo menos indica que han cambiado las posiciones acreedora y deudora originales (ha cambiado el sentido crediticio). El prestamista debería entregar 924'55 unidades monetarias al prestatario para cancelar la operación.

Por la izquierda y por el método prospectivo:

$R_5^- = CPF_5^{[5,7]} - PF_5^{[5,7]} = 2.605'9337 - 1.000\cdot(1+0'04)^{-(7-5)} \cong 1.681'3775$, el signo positivo indica que se mantienen las posiciones acreedora y deudora originales. El prestatario debería entregar 1.681'3775 unidades monetarias al prestamista si quisiera cancelar la operación.

Reserva matemática en t=6 a partir de la reserva obtenida en el apartado anterior.

Como no vence ningún capital en t = 6, no se distingue entre reserva por la derecha ni por la izquierda. Por el método recurrente, se puede resolver a partir de la reserva en t = 5 por la derecha o por la izquierda:

$$R_6 = R_5^{+}u(5,6) + PP_6^{]5,6]} - CPF_6^{]5,6]} = -924'5562 \cdot (1+0'04)^{(6-5)} + 0 - 0 = -961'53845$$

$$R_6 = R_5^{-}u(5,6) + PP_6^{[5,6]} - CPF_6^{[5,6]} = 1.681'3775 \cdot (1+0'04)^{(6-5)} + 0 - 2.605'9337(1+0'04)^{(6-5)} = -961'53845$$

b) Mr. Smith inició el 15-06-2001 un plan de ahorro comprometiéndose a realizar aportaciones al principio de cada trimestre durante 15 años. La operación se valora con una ley de capitalización compuesta con tanto nominal anual del 2.75%. Se pide calcular el capital constituido al final de la operación (15-06-2016) en los siguientes casos:

b.1) *Si la primera aportación es de 70 euros y experimenta un incremento del 0.3% cada trimestre de forma acumulativa*.

La prestación es una renta trimestral variable trimestralmente a razón q = 1 + 0'3%, prepagable de cuantía inicial de 70 euros, de 15 años de duración (15x4 = 60 trimestres). Se pide el valor final de dicha renta (cuantía del capital único de la contraprestación), valorada en capitalización compuesta con un tipo de interés nominal anual del 2'75%. Se usa la fórmula correspondiente. Dado que la razón de la variación y la frecuencia de pago son trimestrales se va a proceder a trabajar con magnitudes trimestrales:

$$V_{15-6-2016} = \ddot{S}(C,q)_{\overline{n\times m}|i^{(m)}}$$

C: la cuantía del primer término de la renta trimestral, es decir C=70€;

$i^{(4)}$: tipo de interés efectivo trimestral equivalente a un tipo de interés nominal anual pagadero trimestralmente del 2'75%. $i^{(4)} = \frac{j(4)}{4} = \frac{0'0275}{4} = 0{,}006875$.

Como q = 1'003 ≠ 1'006875 =1+ $i^{(4)}$, la fórmula es:

$$V_{15-6-2016} = \ddot{S}(70{,}1'003)_{\overline{60|}\,0'006875} = (1'006875)S(70{,}1'003)_{\overline{60|}\,0'006875} =$$

$$= (1'006875)\cdot 70 \cdot \left[\frac{(1'006875)^{60} - 1'003)^{60}}{1'006875 - 1'003}\right] = 5.666'9471 \cong 5.666'95$$

b.2) *Si la primera aportación es de 70 euros y experimenta un incremento del 2.5% cada año de forma acumulativa*.

Ahora la prestación es una renta trimestral variable anualmente a razón q = 1 + 2'5%, prepagable de cuantía inicial del primer trimestre de 70 euros, de 15 años de duración. Se pide el valor final de dicha renta, valorada en capitalización compuesta con un tipo de interés nominal anual del 2'75%. Dado que la razón de la variación es anual y la frecuencia de pago trimestral, no coinciden, se va a proceder a obtener dicho valor como renta anual fraccionada trimestralmente:

$$V^{(4)}_{15-6-2016} = \ddot{S}^{(4)}(4\times C, q)_{\overline{n}|\,i}$$

C: la cuantía del primer término de la renta trimestral, es decir C=70€. La cuantía del primer año: 4·70 = 280 euros;

i : tipo de interés efectivo anual equivalente a un tipo de interés nominal anual pagadero trimestralmente del 2'75%, $i = (1+i^{(4)})^4 - 1 = (1'006875)^4 - 1 = 0'0277849$.

Como q = 1'025 ≠ 1'0277849 =1+ i, la fórmula es:

$$V^{(4)}_{15-6-2016} = \ddot{S}^{(4)}(280{,}1'025)_{\overline{15|}\,0'0277849} = (1'006875)S^{(4)}(280{,}1'025)_{\overline{15|}\,0'0277849} =$$

$$V^{(4)}_{15-6-2016} = (1'006875)S(280{,}1'025)_{\overline{15|}\,0'0277849}\cdot\frac{i}{j(4)} =$$

$$= (1'006875)\cdot 280 \cdot \left[\frac{(1'0277849)^{15} - 1'025)^{15}}{1'0277849 - 1'025}\right]\cdot\frac{0'0277849}{0'0275} = 6.153'3697 \cong 6.153'37$$

c) El 10 de julio de 2000 una persona pidió un préstamo francés indexado de 50.000 euros, 3 años de duración y términos amortizativos mensuales. El tipo de interés nominal anual para el primer año fue del 5%. Para el resto de años, dicho tipo de interés se obtuvo a partir del índice de referencia más un diferencial de un 1%. Tras acabar el préstamo el 10-7-2003 se conocen los índices de referencia utilizados en los 2 años últimos: i_{r2}= 4%, i_{r3}=3,75%.

Los gastos a cargo del prestatario han sido del 1% de comisión de apertura sobre el importe prestado, unos gastos de notaría iniciales de 2000 euros y finales de 600 euros. En estas condiciones, se pide:

c.1) *Los términos amortizativos*

Son 36 términos (3 años por 12 meses)

$$1^{er}\text{ año} \rightarrow j_1(12)=0{,}05 \rightarrow i_1^{(12)}=\frac{0{,}05}{12}=0{,}0041\widehat{6}; a_1=a_2=\cdots=a_{12};$$

$$a_1=\frac{C_0}{a_{\overline{nx12}|\,i_1^{(12)}}}=\frac{50.000}{a_{\overline{36}|\,0{,}0041\widehat{6}}}=1.498'5451 \rightarrow 1.498'55; C_{12}=a_1\cdot a_{\overline{24}|\,i_1^{(12)}}=1.498{,}55\cdot a_{\overline{24}|\,0{,}0041\widehat{6}}=34.157'79$$

$$2^{o}\text{ año} \rightarrow j_2(12)=i_{r2}+0{,}01=0{,}04+0{,}01=0{,}05 \rightarrow i_2^{(12)}=\frac{0{,}05}{12}=0{,}0041\widehat{6}.$$

Como es el mismo tipo de interés los términos amortizativos mensuales del segundo año son de igual cuantía que los del primer año.

$$a_1=a_{13}=\cdots=a_{24}=1.498'5451 \cong 1.498'55$$
$$\rightarrow C_{24}=a_{13}\cdot a_{\overline{12}|\,i_2^{(12)}}=1.498{,}55\cdot a_{\overline{12}|\,0{,}0041\widehat{6}}=17.504'892 \cong 17.504'89$$

$$3^{o}\text{ año} \rightarrow j_3(12)=i_{r3}+0{,}01=0{,}0375+0{,}01=0{,}047 \rightarrow i_3^{(12)}=\frac{0{,}0475}{12}=0{,}003958\widehat{3}; \quad a_{25}=a_{26}=\cdots=a_{36}$$

$$a_{25}=\frac{C_{24}}{a_{\overline{12}|\,i_3^{(12)}}}=\frac{17.504'89}{a_{\overline{12}|\,0{,}003958\widehat{3}}}=1.496'55 \rightarrow C_{36}=0$$

c.2) *La ecuación que permita obtener el tanto efectivo de coste*.

Para plantear dicha ecuación es preciso conocer la prestación recibida (P_p) y la contraprestación entregada (CP_p) realmente por el prestatario. El tanto efectivo de coste, i_p, es el tipo de interés efectivo anual que en capitalización compuesta hace equivalente esos dos conjuntos.
Existen gastos a cargo del prestario, además de los términos amortizativos deberá pagar dichos gastos.
La comisión de apertura, 1% sobre C_0, 0'01(50.000) es un capital financiero de (500, 0) es una característica bilateral inicial, por lo que además de gasto para el prestario supone un ingreso para el prestamista. Los otros gastos de notaría, iniciales (2.000, 0) y finales (600, 36), son unilaterales, es decir, son gasto del prestatario, pero no se traducen en ingresos para el prestamista.
Prestación realmente recibida: $P_p = \{(50.000,0)\}$
Contraprestación realmente entregada:

$$CP_p = \{(500,0);(2.000,0);(1.498'55,1);\cdots(1.498'55,24);(1.496'55);\cdots;(1.496'55,36);(600,36)\}$$

Se plantea la ecuación de equivalencia, por ejemplo en el inicio, $P_{p_0} = CP_{p_0}$

$$50.000 = 500 + 2.000 + 1.498'55 a_{\overline{24|}\, i_p^{(12)}} + 1.496'55 a_{\overline{12|}\, i_p^{(12)}} (1+i_p^{(12)})^{-24} + 600(1+i_p^{(12)})^{-36}$$

De esta ecuación no se obtiene el tipo efectivo de coste, pues sale un tipo mensual, y por definición el tipo efectivo de coste es anual. Se obtiene éste a partir de las relaciones de tipos equivalentes: $i_p = (1+i_p^{(12)})^{12} - 1$

c.3) *La ecuación que permita obtener el tanto efectivo de rendimiento*.

Para plantear dicha ecuación es preciso conocer la prestación entregada (P_a) y la contraprestación recibida (CP_a) realmente por el prestamista. El tanto efectivo de rendimiento, i_a, es el tipo de interés efectivo anual que en capitalización compuesta hace equivalente esos dos conjuntos.

Existen un gasto a cargo del prestario que es un ingreso para el prestamista, y no hay más características comerciales que afecten al prestamista (ni ingresos a su favor ni gastos a su cargo).

La comisión de apertura, 1% sobre 50.000 es un capital financiero de (500, 0) que, al ser una característica bilateral gasto para el prestario, supone un ingreso para el prestamista (mayor contraprestación real recibida, o menor prestación real entregada), además de las entradas correspondientes a la operación pura (términos amortizativos).

Prestación realmente entregada: $P_a = \{(50.000,0)\}$

Contraprestación realmente recibida:

$$CP_a = \{(500,0);(1.498'55,1);\cdots(1.498'55,24);(1.496'55);\cdots;(1.496'55,36)\}$$

Se plantea la ecuación de equivalencia, por ejemplo en el inicio, $P_{a_0} = CP_{a_0}$

$$50.000 = 500 + 1.498'55\, a_{\overline{24|}\, i_a^{(12)}} + 1.496'55\, a_{\overline{12|}\, i_a^{(12)}} (1 + i_a^{(12)})^{-24}$$

De esta ecuación no se obtiene el tipo efectivo de rendimiento, pues sale un tipo mensual, y por definición el tipo efectivo de rendimiento es anual. Se obtiene éste a partir de las relaciones de tipos equivalentes: $i_a = (1 + i_a^{(12)})^{12} - 1$

d) Sea un empréstito con las siguientes características:

N = 1.000.000 títulos.

Valor nominal de una obligación: C = 500 euros.

Obligaciones americanas con pago de cupón anual.

Las obligaciones se amortizan a los 5 años.

Si el tanto efectivo anual es el 4%; obténgase:

d.1) *Los términos amortizativos de una obligación.*

Son 5 términos amortizativos anuales, pues se amortizan a los 5 años. Por ser obligaciones americanas, los cuatro primeros constan sólo de cuota de interés y el quinto y último consta de cuota de interés más una cuota de amortización igual al nominal de la obligación. Dado que el tipo de interés efectivo anual es constante del 4% y que al ser obligaciones americanas no se amortiza nada, las 5 cuotas de interés anuales serán iguales.

P : C

CP:	Ci	Ci	Ci	Ci	Ci+C
0	1	2	3	4	5

$$a'_1 = a'_2 = a'_3 = a'_4 = C \cdot i = 500 \cdot 0'04 = 20\,€$$

$$a'_5 = C \cdot (1+i) = 500 \cdot 1'04 = 520\,€$$

d.2) *Capital vivo del empréstito a los 2 años y medio.*

Son obligaciones americanas con cupón anual, por lo que los 2’5 años no coincide con ningún vencimiento de término amortizativo, el capital vivo se calculará por el método recurrente a partir del capital vivo a los dos años.
Capital vivo de una obligación a los 2’5 años. El capital vivo a los dos años exactos es el nominal de la obligación, C, pues se han ido pagando los intereses (cupones) devengados en los dos años.

$$C_2 = C_0 = 500$$

$$C_{2'5} = C_2 \cdot (1'04)^{0'5} = 500 \cdot (1'04)^{0'5} = 509'90195135927\,9 \cong 509'90\,€$$

Para obtener el capital vivo del empréstito, dado que son obligaciones de las mismas características, basta con multiplicar el capital vivo de una obligación por el número de obligaciones del empréstito:

$$C^T_{2'5} = C_{2'5} \cdot N = 509'90 \cdot 1.000.000 = 509.900.000\ €$$

También podía calcularse directamente a partir de datos del empréstito:

$C_2{}^T = C_0{}^T = C\,N = 500 \cdot 1.000.000 = 500.000.000$ €

$C^{T}_{2'5} = C^{T}_{2} \cdot (1'04)^{0'5} = 500.000.000 \cdot (1'04)^{0'5} = 509.901.951'359279$ € (Discrepancia debida al redondeo)

d.3) *Valor de mercado de una obligación a los 4 años si en dicha fecha el tipo de interés de mercado fuera del 5%.*

A los 4 años, sólo queda pendiente de cobro el último término amortizativo, por lo que hay que valorar el derecho a cobrar dicho término:

$V_4 = a'_5 (1+i_m)^{-1} = 520 (1+0,05)^{-1} = 495'2381 \approx 495'24$€

Como puede apreciarse este precio-valor está por debajo de la reserva matemática a los 4 años, que es de 500€ al ser un préstamo americano por ser superior el interés efectivo de mercado al efectivo de la obligación.

Fuente: enunciados correspondientes a exámenes de diferentes años de la Universidad de Valencia