EXAMEN AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

Ingeniería Técnica Industrial (Química)

1. Dada la ecuación diferencial

$$y''' - y'' = F(x)$$

(a) Resolver $y''' - y'' = 0$.

(b) Escribir la solución general que corresponde a los distintos valores de $F(x)$, sin calcular los coeficientes de la solución particular:

b1. $F(x) = xe^x + \sin 2x$.

b2. $F(x) = x + 3e^x$.

2. Clasificar y realizar el cambio adecuado, indicando la ecuación en que se transforma (no resolver la ecuación obtenida).

(a) $y = -xy' + \sin(y')$.

(b) $(x + y)dx + (3x + y)dy = 0$.

3. Resolver mediante la transformada de Laplace el problema de valor inicial:

$$y'' - 2y' + 3y = 9 \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 0$$

4. (a) Transformar mediante un cambio de variable la ecuación diferencial

$$xy'' + 2y' = x$$

en una de coeficientes constantes.

(b) Resolver la ecuación diferencial de coeficientes constantes obtenida en el apartado anterior.

(c) Resolver por otro método la ecuación diferencial:

$$xy'' + 2y' = x$$

5. Resolver la ecuación diferencial:

$$y' = 2y - xy^2e^x$$

RESOLUCIÓN

1. Dada la ecuación diferencial

$$y''' - y'' = F(x)$$

(a) Resolver $y''' - y'' = 0$.

<u>Solución.-</u>

Planteamos la ecuación característica:

$$r^3 - r^2 = 0 \leftrightarrow r^2(r-1) = 0$$

Tenemos dos soluciones: $r = 0$ (doble) y $r = 1$ (simple). La solución general de la ecuación diferencial viene dada por:

$$y(x) = C_1 + C_2 x + C_3 e^x$$

(b) Escribir la solución general que corresponde a los distintos valores de $F(x)$, sin calcular los coeficientes de la solución particular:

b1. $F(x) = xe^x + \sin 2x$.

<u>Solución.-</u>

La solución general de la ecuación diferencial completa viene dada por la suma de la solución general de la ecuación homogénea (calculada en el apartado (a)) y una solución particular de la completa, que será de la forma:

$$y_P(x) = (Ax + B)e^x + C\cos(2x) + D\sin(2x)$$

Los coeficientes A, B, C y D se determinarían utilizando el método de los coeficientes indeterminados, i.e., sustituyendo en la ecuación diferencial. La solución general de la ecuación diferencial viene dada por:

$$y(x) = C_1 + C_2 x + C_3 e^x + (Ax + B)e^x + C\cos(2x) + D\sin(2x)$$

b2. $F(x) = x + 3e^x$.

Solución.-

La solución general de la ecuación diferencial completa viene dada por la suma de la solución general de la ecuación homogénea (calculada en el apartado (a)) y una solución particular de la completa, que será de la forma:

$$y_P(x) = x^2(Ax + B) + Ce^x$$

Los coeficientes $A, B, y\, C$ se determinarían utilizando el método de los coeficientes indeterminados, i.e., sustituyendo en la ecuación diferencial. La solución general de la ecuación diferencial viene dada por:

$$y(x) = C_1 + C_2x + C_3e^x + x^2(Ax + B) + Ce^x$$

2. Clasificar y realizar el cambio adecuado, indicando la ecuación en que se transforma (no resolver la ecuación obtenida).

(a) $y = -xy' + \sin(y')$.

Solución.-

Se trata de una ecuación diferencial de primer orden no lineal en la derivada resoluble en y. Haremos el cambio $p = y'$. Derivamos la ecuación respecto x:

$$y' = -y' - xy'' + \cos(y')\, y''$$

Como $p = y'$ se tiene:

$$p = -p - xp' + \cos(p)\, p'$$

de donde

$$p' = \frac{2p}{co\,s\,p - x}$$

que es lineal en p'.

(b) $(x+y)dx+(3x+y)dy=0$.

Solución.-

Se trata de una ecuación diferencial de primer orden homogénea puesto que las funciones $A(x,y)=-x-y$ y $B(x,y)=3x+y$ son funciones homogéneas de grado 1.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-x-y}{3x+y}\leftrightarrow y'=\frac{-1-\frac{y}{x}}{3+\frac{y}{x}}$$

Hacemos el cambio $t=\frac{y}{x}$ y entonces $y=tx$ de donde $y'=t'x+t$. Así

$$t'x+t=\frac{-1-t}{3+t}\leftrightarrow t'x=\frac{-1-t}{3+t}-t\leftrightarrow t'x=-\frac{t^2+4t+1}{3+t}$$

transformando la ecuación en una ecuación de variables separables:

$$\frac{3+t}{(t^2+4t+1)}dt=-\frac{1}{x}dx$$

3. Resolver mediante la transformada de Laplace el problema de valor inicial:

$$y''-2y'+3y=9\quad y(0)=0\quad y'(0)=0$$

Solución.-

Aplicamos la transformada a la ecuación diferencial:

$$\mathcal{L}\{y''\}-2\mathcal{L}\{y'\}+3\mathcal{L}\{y\}=9\mathcal{L}\{1\}$$

Ahora bien,

$$\mathcal{L}\{y''\}=s^2\mathcal{L}\{y\}-sy(0)-y'(0)=s^2\mathcal{L}\{y\}$$

$$\mathcal{L}\{y'\}=s\mathcal{L}\{y\}-y(0)=s\mathcal{L}\{y\}$$

Por tanto,

$$s^2\mathcal{L}\{y\}-2s\mathcal{L}\{y\}+3\mathcal{L}\{y\}=\frac{9}{s}$$

de donde se tiene

$$(s^2 - 2s + 3)\mathcal{L}\{y\} = \frac{9}{s} \rightarrow \ \mathcal{L}\{y\} = \frac{9}{s(s^2 - 2s + 3)}$$

y por tanto

$$y = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{9}{s(s^2 - 2s + 3)}\right\}$$

Calculamos la transformada inversa, descomponiendo $\frac{9}{s(s^2-2s+3)}$ en suma de fracciones simples:

$$\frac{9}{s(s^2 - 2s + 3)} = \frac{A}{s} + \frac{Ms + N}{s^2 - 2s + 3} = \frac{A(s^2 - 2s + 3) + (Ms + N)s}{s(s^2 - 2s + 3)}$$

Si $s = 0$

$$9 = 3A \rightarrow A = 3$$

Si $s = 1$

$$9 = 6 + M + N \rightarrow 3 = M + N$$

Si $s = -1$

$$9 = 18 + M - N \rightarrow \ -9 = M - N$$

de donde $M = -3$ y $N = 6$.

Ahora bien

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{9}{s(s^2 - 2s + 3)}\right\} = 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s - 2}{s^2 - 2s + 3}\right\}$$

Calculamos cada transformada inversa:

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1.$

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s - 2}{s^2 - 2s + 3}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s - 2}{(s - 1)^2 + 2}\right\} = e^t\cos\left(\sqrt{2}t\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}e^t\sin(\sqrt{2}t)$

Luego la solución al PVI es:

$$y(t) = \ 3 - 3e^t\cos\left(\sqrt{2}t\right) + \frac{3}{\sqrt{2}}e^t\sin(\sqrt{2}t)$$

4. (a) Transformar mediante un cambio de variable la ecuación diferencial

$$xy'' + 2y' = x$$

en una de coeficientes constantes.

Solución.-

Multiplicamos la ecuación por x:

$$x^2y'' + 2x = x^2$$

Hacemos el cambio $x = e^t$ de donde $t = \ln(x)$. Entonces:

$$x\frac{dy}{dx} = x\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = x\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{x} = \frac{dy}{dt}$$

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} = x^2\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = x^2\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}\right) = x\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right) - \frac{dy}{dt} = x\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) - \frac{dy}{dt}$$
$$= x\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}\right) - \frac{dy}{dt} = \frac{d^2y}{dt} - \frac{dy}{dt}.$$

Luego, la ecuación se transforma en

$$\frac{d^2y}{dt} + \frac{dy}{dt} = e^{2t}$$

que es de coeficientes constantes.

(b) Resolver la ecuación diferencial de coeficientes constantes obtenida en el apartado anterior.

Solución.-

En primer lugar resolvemos la ecuación homogénea asociada. La ecuación característica de esta ecuación diferencial viene dada por $r^2 + r = 0 \leftrightarrow r(r+1) = 0$ cuyas soluciones son $r = 0$, $r = -1$, ambas simples. Así la solución general de la ecuación homogénea es

$$y_H(t) = C_1 + C_2e^{-t}$$

Buscamos una solución particular de la ecuación completa de la forma $y_P(t) = Ae^{2t}$. Buscamos A para que $y_P(t)$ sea solución de la ecuación completa. Notemos que $\frac{d}{dt}y_P(t) = 2Ae^{2t}$ y $\frac{d^2}{dt^2}y_P(t) = 4Ae^{2t}$. Sustituyendo en la ecuación diferencial tenemos que:

$$4Ae^{2t} + 2Ae^{2t} = e^{2t} \rightarrow 6A = 1 \rightarrow A = \frac{1}{6}$$

Luego, la solución general de la ecuación completa viene dada por:

$$y(t) = C_1 + C_2e^{-t} + \frac{1}{6}e^{2t}$$

Nota: Si deshacemos el cambio $x = e^t$ obtenemos la solución de la ecuación diferencial del apartado (a):

$$y(t) = C_1 + C_2\frac{1}{x} + \frac{1}{6}x^2$$

(c) Resolver por otro método la ecuación diferencial:

$$xy'' + 2y' = x$$

Solución.-

Hacemos el cambio $t = y'$, entonces:

$$xt' + 2t = x$$

Dividiendo la ecuación por x obtenemos la ecuación lineal:

$$t' + \frac{2}{x}t = 1$$

Multiplicamos la ecuación por $e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2lnx} = e^{\ln x^2} = x^2$

$$x^2t' + 2xt = x^2 \leftrightarrow [x^2t]' = x^2$$

de donde

$$x^2t = \int x^2dx = \frac{x^3}{3} + C_1$$

Así,

$$t = \frac{x}{3} + \frac{C_1}{x^2}$$

Deshaciendo el cambio tenemos:

$$y = \int \frac{x}{3} + \frac{C_1}{x^2} dx = \frac{x^2}{6} - \frac{C_1}{x} + C_2$$

Luego,

$$y(x) = \frac{x^2}{6} - \frac{C_1}{x} + C_2$$

5. Resolver la ecuación diferencial:

$$y' = 2y - xy^2 e^x$$

Solución.-

Se trata de una ecuación de Bernoulli:

$$y' - 2y = -xy^2 e^x$$

Dividimos la ecuación por y^2:

$$\frac{y'}{y^2} - 2\frac{1}{y} = -xe^x$$

Hacemos el cambio $t = \frac{1}{y}$ de donde $t' = -\frac{1}{y^2}y'$. Así,

$$-t' - 2t = -xe^x \leftrightarrow t' + 2t = xe^x$$

obteniendo una ecuación lineal de primer orden. Multiplicamos ésta última por $e^{\int 2dx} = e^{2x}$

$$e^{2x}t' + 2e^{2x}t = xe^{3x} \leftrightarrow [e^{2x}t]' = xe^{3x}$$

Integrando,

$$e^{2x}t = \int xe^{3x} dx$$

Resolvemos la integral por partes haciendo $u = x \to du = dx$ y $dv = e^{3x}dx \to v = \frac{1}{3}e^{3x}$.

$$e^{2x}t = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}dx = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + C$$

de donde

$$t = \frac{1}{3}xe^{x} - \frac{1}{9}e^{x} + Ce^{-2x}$$

Deshaciendo el cambio obtenemos que

$$y(x) = \frac{9}{(3x-1)e^{x} + 9Ce^{-2x}}$$

<u>Fuente:</u> *Enunciados correspondientes a distintos exámenes de la Universidad Politécnica de Valencia.*