

EXAMEN ÁLGEBRA II INGENIERÍA INDUSTRIAL

PROBLEMAS CORTOS

(P1.1) Sean T y S endomorfismos sobre C^2 definidos por $T(1,0)=(1,-2)$, $T(0,1)=(i,-1)$ y $S(x,y)=(x,3x+(2+3i)y) \forall (x,y) \in C^2$. Calcula el endomorfismo $(2T+(5-2i)S)^*$.

(P1.2) (a) Ajusta una parábola de la forma $y=ax^2+bx$ a la nube de puntos $\{(0,1),(2,-2),(1,-3)\}$. Si ajustamos una recta a los puntos anteriores, el error cuadrático es $\frac{25}{6}$. Justifica que curva se aproxima mejor.

(b) Sea $A \in M_{n \times n}(K)$ tal que $A^2 = 0_{n \times n}$. Prueba que $2\rho(A) \leq n$.

(P1.3) Reduce y clasifica la siguiente cuádrica, especificando las transformaciones que realices:

$$-2xy - 2xz - 2yz + 2x + 2y + 2z - \frac{5}{2} = 0$$

(P1.4) (a) Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Prueba que A es definida positiva y

calcula la factorización de Cholevski de A .

(b) Si $B = A^2 - 2A + E_{3 \times 3}$, calcula los autovalores de B .

PROBLEMA LARGO

(P2) Considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in M_{4 \times 4}(\mathbb{C})$$

- (a) Calcula el polinomio característico de A , sus valores propios y la multiplicidad algebraica y geométrica de cada valor propio.
- (b) ¿Es A una matriz diagonalizable? Justifica tu respuesta.
- (c) Calcula la forma canónica de Jordan de la matriz A , J_A , y una matriz P no singular tal que $A = PJ_A P^{-1}$.
- (d) Obtén la forma canónica de Jordan de la matriz compañera asociada al polinomio característico de A , A_C . ¿Son A y A_C similares?

PROBLEMAS CORTOS

(P1.1) Sean T y S endomorfismos sobre \mathbb{C}^2 definidos por $T(1,0)=(1,-2)$, $T(0,1)=(i,-1)$ y $S(x,y)=(x,3x+(2+3i)y) \forall (x,y) \in \mathbb{C}^2$. Calcula el endomorfismo $(2T+(5-2i)S)^*$.

Solución:

Aplicando las propiedades del endomorfismo adjunto tenemos que:

$$(2T+(5-2i)S)^* = (2T)^* + ((5-2i)S)^* = \overline{2T}^* + \overline{(5-2i)}S^* = 2T^* + (5+2i)S^*$$

Calculemos, en primer lugar, T^* . Para ello consideremos $B = \{(1,0), (0,1)\}$ base ortonormal de \mathbb{C}^2 . Así,

$$T_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow T_{BB}^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -i & -1 \end{pmatrix}$$

y por lo tanto,

$$T^*(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x-2y, -ix-y)$$

Ahora, calculemos S^* .

$$S_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2+3i \end{pmatrix} \Rightarrow S_{BB}^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2-3i \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$S^*(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2-3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x+3y, (2-3i)y)$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} (2T+(5-2i)S)^* &= 2(x-2y, -ix-y) + (5+2i)(x+3y, (2-3i)y) \\ &= (2x-4y, -2ix-2y) + ((5+2i)x + (15+6i)y, (16-11i)y) \\ &= (2x-4y+5x+2ix+15y+6iy, -2ix-2y+16y-11iy) \\ &= ((7+2i)x + (11+6i)y, -2ix + (14-11i)y) \end{aligned}$$



(P1.2)

(a) Ajusta una parábola de la forma $y = ax^2 + bx$ a la nube de puntos $\{(0,1), (2,-2), (1,-3)\}$. Si ajustamos una recta a los puntos anteriores, el error cuadrático es $\frac{25}{6}$. Justifica que curva se aproxima mejor.

Solución:

Queremos ajustar una parábola de la forma $y = ax^2 + bx$ a la nube de puntos $\{(0,1), (2,-2), (1,-3)\}$. Para ello planteamos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 1 &= a \cdot 0^2 + b \cdot 0 \\ -2 &= a \cdot 2^2 + b \cdot 2 \\ -3 &= a \cdot 1^2 + b \cdot 1 \end{aligned}$$

o en forma matricial $Ax=b$,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Claramente $\rho(A) = 2 \neq 3 = \rho(A|b)$. Por tanto el sistema es incompatible. Formulamos las ecuaciones normales del sistema:

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Operando, obtenemos el sistema

$$\begin{pmatrix} 17 & 9 \\ 9 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Lo resolvemos por Cramer:

$$a = \frac{\begin{vmatrix} -11 & 9 \\ -7 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 17 & 9 \\ 9 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{8}{4} = 2 \quad b = \frac{\begin{vmatrix} 17 & -11 \\ 9 & -7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 17 & 9 \\ 9 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{-20}{4} = -5$$

Luego, la parábola pedida es

$$y = 2x^2 - 5x$$

Calculemos el error cuadrático cometido,

$$\|b - Ax_0\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \right\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2 = 1$$

Como $1 < \frac{25}{6}$, la parábola se aproxima mejor.

(b) Sea $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ tal que $A^2 = 0_{n \times n}$. Prueba que $2\rho(A) \leq n$.

Solución:

Utilizando el tercer teorema del rango tenemos:

$$0 = \rho(0_{n \times n}) = \rho(A^2) = \rho(A \cdot A) \geq \rho(A) + \rho(A) - n$$

Por lo tanto,

$$2\rho(A) \leq n$$

(P1.3) Reduce y clasifica la siguiente cuádrlica, especificando las transformaciones que realices:

$$-2xy - 2xz - 2yz + 2x + 2y + 2z - \frac{5}{2} = 0$$

Solución:

Escribimos la cuádrlica en forma matricial:

$$(x \ y \ z) \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + (2 \ 2 \ 2) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{5}{2} = 0$$

Diagonalicemos la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ respecto una base ortonormal de autovectores. Para ello calculamos el polinomio característico de A:

$$\begin{aligned} d_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & -1 \\ -1 & -\lambda & -1 \\ -1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (F_1 + F_2 + F_3) = \begin{vmatrix} -\lambda - 2 & -\lambda - 2 & -\lambda - 2 \\ -1 & -\lambda & -1 \\ -1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-\lambda - 2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -\lambda & -1 \\ -1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (-1)(\lambda + 2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -\lambda + 1 & 0 \\ -1 & 0 & -\lambda + 1 \end{vmatrix} \\ &= (-1)(\lambda + 2)(-\lambda + 1)^2 = (-1)^3(\lambda + 2)(\lambda - 1)^2 \end{aligned}$$

El espectro de A es $\sigma(A) = \{-2, 1, 1\}$. Calculemos ahora los autovectores.

$$\begin{aligned} S_{-2} &= N(A + 2E) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \mathcal{L}\{(1, 1, 1)\} \\ &= \mathcal{L}\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}. \end{aligned}$$

$$S_1 = N(A - E) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \mathcal{L}\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$$

Los autovectores del subespacio propio asociado al autovalor 1 no son ortogonales. Aplicamos, pues, Gram-Schmidt:

$$\begin{aligned} v_1 &= (-1, 1, 0) \\ v_2 &= (-1, 0, 1) - \frac{\langle (-1, 0, 1) | (-1, 1, 0) \rangle}{\langle (-1, 1, 0) | (-1, 1, 0) \rangle} (-1, 1, 0) = (-1, 0, 1) - \frac{1}{2} (-1, 1, 0) \\ &= \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right) \end{aligned}$$

Como $\|v_1\| = \sqrt{2}$ y $\|v_2\| = \sqrt{\frac{3}{2}}$, tenemos:

$$S_1 = \mathcal{L}\left\{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)\right\}$$

Luego $A = PDP^T$, donde:

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

Hacemos el cambio $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, entonces queda la ecuación de la cuádrica:

$$(x' \ y' \ z') \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} - \frac{5}{2} = 0$$

esto es,

$$-2x'^2 + y'^2 + z'^2 + \frac{6}{\sqrt{3}}x' - \frac{5}{2} = 0$$

Completamos cuadrados:

$$-2x'^2 + \frac{6}{\sqrt{3}}x' = -2\left(x'^2 - \frac{3}{\sqrt{3}}x'\right) = -2\left(x'^2 - \frac{3}{\sqrt{3}}x' + \left(\frac{3}{2\sqrt{3}}\right)^2\right) + \frac{3}{2}$$

Hacemos el cambio:

$$\begin{cases} x'' = x' - \frac{3}{2\sqrt{3}} \\ y'' = y' \\ z'' = z' \end{cases}$$

Luego,

$$-2x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

La forma reducida de la cuádrica es:

$$-\frac{x^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} + y^2 + z^2 = 1$$

que corresponde a un hiperboloide de una hoja.

(P1.4) (a) Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Prueba que A es definida positiva y calcula la factorización de Cholevski de A.

Solución:

Calculamos los autovalores de A:

$$\begin{aligned} d_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 8) \\ &= (-1)^3(\lambda - 2)(\lambda - 5)(\lambda - 1) \end{aligned}$$

Como todos los valores propios son positivos, A es definida positiva.

Calculemos la factorización LDU de A:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 + \frac{1}{3}F_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 8/3 \end{pmatrix} = \hat{U}$$

Ahora,

$$A = LDU$$

donde

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 8/3 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Notemos que $U = L^T$. Así, $A = LDL^T$ y

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 4/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 4/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego,

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & -\sqrt{3}/3 & \frac{4}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

y la factorización de Cholevski queda:

$$A = \Delta\Delta^T$$

(b) Si $B = A^2 - 2A + E_{3 \times 3}$, calcula los autovalores de B.

Solución:

Consideremos $f(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$. Notemos que $f(A) = B$. Como los valores propios de A son 2, 1, 5, aplicando el teorema de los espectros de Frobenius

$$\sigma(B) = \{f(2), f(1), f(5)\} = \{1, 0, 16\}$$



PROBLEMA LARGO

(P2) Considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in M_{4 \times 4}(\mathbb{C})$$

(a) Calcula el polinomio característico de A, sus valores propios y la multiplicidad algebraica y geométrica de cada valor propio.

Solución:

Calculamos el polinomio característico de A:

$$\begin{aligned} d_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 & 3 & 0 \\ -1 & -\lambda & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda) \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 & 3 \\ -1 & -\lambda & -3 \\ 1 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-2-\lambda) \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 & 3 \\ -1 & -\lambda & -3 \\ 0 & -2-\lambda & -2-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 & 3 \\ -1 & -\lambda & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda+2)^2 \begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 & 3 \\ -1 & -\lambda+3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda+2)^2 \begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda+3 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^4 (\lambda+2)^2 (\lambda-4)^2 \end{aligned}$$

Los valores propios de A son

$$\begin{aligned} \lambda = -2 & \quad ma(-2) = 2 \\ \lambda = 4 & \quad ma(4) = 2 \end{aligned}$$

Calculemos los vectores propios de A.

Para $\lambda = -2$

$$S_{-2} = N(A + 2E) = N \begin{pmatrix} 7 & 4 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} 7x + 4y + 3z = 0 \\ -x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

sumando ambas ecuaciones se obtiene:

$$6x + 6y = 0 \Rightarrow x = -y$$

de donde

$$3z = 2y - x = 2y + y = 3y \Rightarrow z = y$$

Así la solución del sistema es $(x, y, z, t) = (-\alpha, \alpha, \alpha, \beta)$ y por tanto,

$$S_{-2} = \mathcal{L}\{(-1, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$$

Como $mg(-2) = \dim(N(A + 2E)) = 2$.

Para $\lambda = 4$

$$S_4 = N(A - 4E) = N \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 0 \\ -1 & -4 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} x + 4y + 3z = 0 \\ x - 2y - 3z = 0 \\ -6t = 0 \end{cases}$$

sumando las dos primeras ecuaciones se obtiene:

$$2x + 2y = 0 \Rightarrow x = -y$$

de donde

$$3z = x - 2y = -y - 2y = -3y \Rightarrow z = -y$$

Así la solución del sistema es $(x, y, z, t) = (-\alpha, \alpha, -\alpha, 0)$ y por tanto,

$$S_{-2} = \mathcal{L}\{(-1, 1, -1, 0)\}$$

Como $mg(4) = \dim(N(A - 4E)) = 1$.

(b) ¿Es A una matriz diagonalizable? Justifica tu respuesta.

Solución:

No, pues la multiplicidad algebraica y geométrica del valor propio 4 no coincide.

(c) Calcula la forma canónica de Jordan de la matriz A, J_A , y una matriz P no singular tal que $A = PJ_A P^{-1}$.

Solución:

Calculemos las cadenas de Jordan asociadas al valor propio 4. Las cadenas de Jordan de longitud 1 son:

$$CDJ(1) = \{b_1 = (-\alpha, \alpha, -\alpha, 0)\}$$

Busquemos un vector $b_2 \in \mathbb{R}^4$ tal que $(A - 4E)b_2 = b_1$:



$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 0 \\ -1 & -4 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ \alpha \\ -\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} x + 4y + 3z = -\alpha \\ x - 2y - 3z = -\alpha \\ -6t = 0 \end{cases}$$

Sumando las dos primeras ecuaciones:

$$2x + 2y = -2\alpha \Rightarrow x = -\alpha - y$$

de donde

$$3z = \alpha + x - 2y = \alpha - \alpha - y - 2y = -3y \Rightarrow z = -y$$

Luego $b_2 = (-\alpha - \beta, \beta, -\beta, 0)$ y las cadenas de Jordan de longitud 2 son:

$$CDJ(2) = \{b_1 = (-\alpha, \alpha, -\alpha, 0), b_2 = (-\alpha - \beta, \beta, -\beta, 0)\}$$

Busquemos un vector $b_3 \in \mathbb{R}^4$ tal que $(A - 4E)b_3 = b_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 0 \\ -1 & -4 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha - \beta \\ \beta \\ -\beta \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} x + 4y + 3z = -\alpha - \beta \\ -x - 4y - 3z = \beta \\ x - 2y - 3z = -\beta \\ -6t = 0 \end{cases}$$

De las dos primeras ecuaciones obtenemos

$$-\alpha - \beta = -\beta \Rightarrow \alpha = 0$$

pero si $\alpha = 0$, el vector terminal es nulo. Contradicción. Luego, no existen cadenas de Jordan de longitud 3.

Tomando $\alpha = 1, \beta = 0$

$$CDJ(2) = \{b_1 = (-1, 1, -1, 0), b_2 = (-1, 0, 0, 0)\}$$

y tenemos

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J_A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$



(d) Obtén la forma canónica de Jordan de la matriz compañera asociada al polinomio característico de A, A_c . ¿Son A y A_c similares?

La matriz compañera de A, tiene como polinomio mínimo

$$m_{A_c}(\lambda) = (\lambda + 2)^2(\lambda - 4)^2$$

Luego la forma canónica de Jordan de A_c es

$$J_{A_c} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Como el polinomio mínimo de A es

$$m_A(\lambda) = (\lambda + 2)(\lambda - 4)^2$$

las matrices A y A_c no son similares.

Fuente: Enunciados correspondientes a exámenes de la Universidad Politécnica de Valencia.

