

FÍSICA CAMINOS. PRIMER CUATRIMESTRE

EJERCICIO 1

(A) Sea el campo vectorial $\vec{f} = (x, 0, 0)$ y considerar un cuadrado sobre el plano xy , de vértices $A(0, 0, 0)$, $B(1, 0, 0)$, $C(1, 1, 0)$, $D(0, 1, 0)$. Se pide:

- 1) Calcular, mediante la definición, la circulación del campo a lo largo del camino ABCDA.
- 2) ¿Es conservativo el campo a la vista del resultado anterior? Razona la respuesta.
- 3) Calcular el rotacional del campo y comentar el resultado en relación con los apartados anteriores.
- 4) Repetir el primer apartado usando algún teorema integral.

(B) El campo $\vec{f} = (yz, xz, xy)$ es conservativo (no es necesario demostrarlo). Encontrar su función potencial sabiendo que es nula en el origen de coordenadas.

EJERCICIO 2

La ley universal de la gravitación enunciada por Newton nos da la fuerza gravitatoria entre dos cuerpos de masas m_1 y m_2 separados una distancia r :

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

siendo G la constante de gravitación, cuyo valor en el sistema internacional de unidades es $6,67 \cdot 10^{-11}$. Se pide:

- 1) Escribir la ecuación de dimensiones de G en el sistema internacional de unidades.
- 2) Expresar G en unidades fundamentales del sistema internacional.

- 3) Expresar G en unidades del sistema cegesimal.
- 4) En un sistema de unidades que tome como unidades fundamentales la aceleración, la densidad y el tiempo, se pide:
 - 4.1) Determinar razonadamente si las magnitudes señaladas pueden ser magnitudes fundamentales de un sistema de unidades para el estudio de la mecánica.
 - 4.2) Ecuación de dimensiones de G en dicho sistema de unidades.

EJERCICIO 3 (Examen 12-01-09, ETSICCP UPV)

Mediante dos máquinas frigoríficas ideales que funcionan cíclicamente (ciclo de Carnot inverso) se desea mantener los recintos A y B a temperaturas $t_A = -15\text{ °C}$ y $t_B = -25\text{ °C}$, siendo la temperatura exterior de 25 °C . La pared plana MN (superficie total 19 m^2) que separa ambos recintos está constituida por (desde A hacia B, conductividades térmicas en $\text{kcal}/(\text{m}\cdot\text{h}\cdot\text{°C})$):

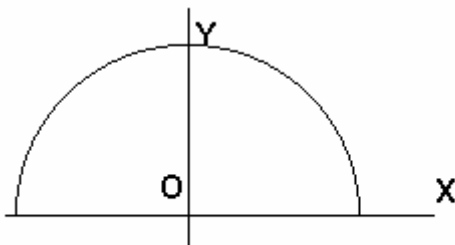
- Capa de pintura de 3 mm de espesor y conductividad 0'92.
- Capa de cemento de 1'5 cm de espesor y conductividad 0'75.
- Pared de ladrillo de 30 cm de espesor y conductividad 0'55.
- Capa de aislante de 15 cm de espesor y conductividad 0'02.
- Capa de pintura de 3 mm de espesor y conductividad 0'92.

Los coeficientes de transmisión de calor por convección son $\alpha_A = 15\text{ kcal}/\text{m}^2\cdot\text{h}\cdot\text{°C}$, $\alpha_B = 7\text{ kcal}/\text{m}^2\cdot\text{h}\cdot\text{°C}$ y en cada uno de los recintos A y B entran desde el exterior 30 kcal/h. Se pide:

- 1) Flujo de calor, en kcal/h, extraído de cada recinto (A y B).
- 2) Potencias consumidas por las máquinas frigoríficas instaladas en A y en B.
- 3) Coste de cada kilocaloría extraída de los recintos A y B si el precio del kWh de energía es de 0'07 €.
- 4) Temperaturas mínimas soportadas por el cemento y por el aislante.

EJERCICIO 4

Calcular el potencial eléctrico en el origen de coordenadas creado por el semidisco de la figura, de radio R y con carga Q uniformemente distribuida.



SOLUCIONES

EJERCICIO 1, SOLUCIÓN

A1) Aplicamos la definición de circulación y separamos la integral total en las integrales a lo largo de cada lado del cuadrado. Para hacer cada integral calculamos el diferencial de longitud respectivo:

$$\oint \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_A^B x \cdot \vec{j} \cdot dx \cdot \vec{i} + \int_B^C x \cdot \vec{j} \cdot dy \cdot \vec{j} + \int_C^D x \cdot \vec{j} \cdot dx \cdot \vec{i} + \int_D^A x \cdot \vec{j} \cdot dy \cdot \vec{j} = 0 + 1 + 0 + 0 = 1$$

A2) El campo no es conservativo porque su circulación a lo largo de un camino cerrado es distinta de cero.

A3) Aplicamos la definición de rotacional:

$$\vec{\text{rot}} \vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{k} \quad \rightarrow \text{ como el rotacional no es nulo el campo es no conservativo, tal y como hemos encontrado en los apartados anteriores.}$$

A4) Aplicamos el teorema de Stokes:

$$\oint \vec{f} \cdot d\vec{r} = \iint \vec{\text{rot}} \vec{f} \cdot d\vec{S} = \iint \vec{k} \cdot d\vec{S} = \iint dx \cdot dy = S_{\text{cuadrado}} = 1$$

B) Puesto que el campo es conservativo (se puede comprobar que su rotacional es nulo) debe existir un campo escalar U que es su función potencial, es decir:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = yz, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = xz, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = xy$$

Resolviendo estas ecuaciones se llega a

$$U = xyz + \text{constante}$$

Imponiendo que se anule en el origen la constante vale cero y por tanto la solución es

$$U = xyz$$

EJERCICIO 2, SOLUCIÓN

- 1) Llamamos M a la magnitud masa, L a la magnitud longitud y T a la magnitud tiempo. Con esto:

$$[G] = M^{-1}L^3T^{-2}$$

2) $[G] = \text{kg}^{-1}\text{m}^3\text{s}^{-2}$

3) $[G] = \text{g}^{-1}\text{cm}^3\text{s}^{-2}$

- 4) (4.1) Las ecuaciones dimensionales de la aceleración, densidad y tiempo son:

$$[a] = LT^{-2}, \quad [\rho] = ML^{-3}, \quad [T] = T$$

Despejando:

$$L = [a]T^2, \quad M = [\rho][a]^3T^6, \quad T = [T]$$

Como podemos despejar es un buen sistema de unidades. Otra forma de verlo es mediante el determinante de los exponentes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

- (4.2) De esta forma $[G] = [\rho]^{-1}T^{-2}$

EJERCICIO 3, SOLUCIÓN

- 1) Calculamos la potencia a través de la pared de separación MN aplicando la fórmula que nos da la potencia transmitida a través de una serie de superficies planas y paralelas (simetría plana):

$$\dot{Q}_{MN} = q_{MN} A_{MN} = \frac{T_A - T_B}{\frac{1}{\alpha_A} + \sum_{i=1}^5 \frac{e_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_B}} = 22'943 \text{ kcal/h}$$

Así, imponiendo para cada recinto que el calor entrante debe ser igual al saliente para que se mantenga la temperatura y denotando con el subíndice 2 al calor saliente de los recintos a través de las máquinas frigoríficas, se tiene

$$\dot{Q}_{2A} = 30 \text{ kcal/h} - 22'943 \text{ kcal/h} = 7'057 \text{ kcal/h}$$

$$\dot{Q}_{2B} = 30 \text{ kcal/h} + 22'943 \text{ kcal/h} = 52'943 \text{ kcal/h}$$

- 2) La eficiencia de una máquina frigorífica de Carnot es $E_f = T_f / (T_c - T_f)$ y la definición general es $E_f = Q_2 / |W|$, siendo W el trabajo entrante en la máquina frigorífica. Así, tomando potencias (dividiendo por el tiempo):

$$|W| = \frac{|\dot{Q}_2|}{E_f}$$

que aplicado a cada recinto nos da:

$$|\dot{W}_A| = 4647'6 \text{ kcal/h}$$

$$|\dot{W}_B| = 6053'0 \text{ kcal/h}$$

- 3) Para un calor $Q_2 = 1 \text{ kcal}$ el trabajo será:

$$|W| = \frac{Q_2}{E_f} = \frac{1}{E_f} \frac{4'18}{3600} \text{ kWh}$$

y por tanto el coste

$$\text{coste} = \frac{4'18 \cdot 0'07}{E_f \cdot 3600} \text{ €}$$

Para cada habitación:

$$\text{Coste}(A) = 1'26 \cdot 10^{-5} \text{ €}$$

$$\text{Coste}(B) = 1'64 \cdot 10^{-5} \text{ €}$$

(4) Aplicamos de nuevo la ecuación de transmisión de calor para simetría plana, en este caso el flujo de calor es el calculado en el primer apartado. Se obtiene:

$$\text{Cemento: } -15'11 \text{ °C}$$

$$\text{Aislante: } -24'83 \text{ °C}$$

EJERCICIO 4, SOLUCIÓN

Consideramos un elemento infinitesimal de carga dq a distancia r del origen de coordenadas. El potencial en el origen será entonces $dV(0) = k \cdot dq/r$, siendo k la constante de Coulomb. La carga está uniformemente distribuida y por tanto la densidad superficial será:

$$\sigma = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{2Q}{\pi R^2}$$

Empleamos coordenadas polares (r, θ) con el diferencial de superficie en estas coordenadas dado por: $dS = r \cdot dr \cdot d\theta$.

Con esto el potencial en el origen será:

$$V(0) = \int dV(0) = \int k \frac{dq}{r} = \int k \frac{\sigma \cdot r \cdot dr \cdot d\theta}{r} = \frac{4kQ}{R}$$

Fuente: Ejercicio 3 correspondiente al Examen 12-01-09, de ETSICCP (UPV) y resto de ejercicios por Profesor Antonio Aliaga Sanchis.