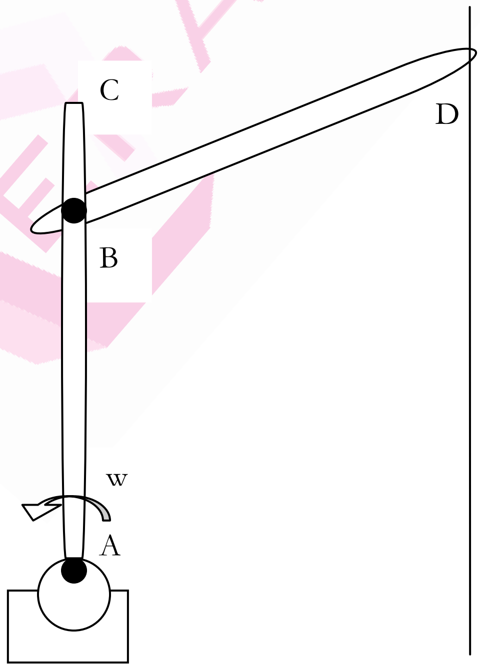
MECÁNICA

C1. (2,5 ptos).- Comprobar la homogeneidad dimensional del teorema de Bernouilli, donde p es presión, ρ es densidad, v es velocidad, g es la cte gravitatoria y h es la altura:

$$p + 1/2\, \rho\, v^2 + \rho g h$$

C2. (2,5 ptos).- En una mudanza intentamos subir un armario mediante una polea motorizada para poder meterlo por el balcón. Sabemos que la masa del armario es de 150 kilos, y el motor de la polea alcanza una aceleración de 4 m/s^2. Sin embargo, la cuerda que pasa por la polea aguanta una tensión máxima de 2000N. ¿Lograremos subir el armario con éxito?

P1. (5 ptos).- El mecanismo de la figura está formada por una barra AC de 1 metro de longitud, que puede girar libremente en torno al punto A. Unida a ella por el punto B , que dista a ¾ partes de la longitud de la barra, hay otra barra BD, que puede girar libremente en torno a B, y de longitud también 1 m. A su vez, esta barra está apoyada sobre una pared vertical. Si sabemos que la barra AB está girando con una velocidad angular constante de 4 rad/s en el sentido que indica la figura, cuando forma un ángulo de 90º con la horizontal, y que la barra BD en ese instante forma un ángulo de 60º con la vertical, calcular : a) velocidad de B b) velocidad angular de la barra BD c) velocidad de D d) velocidad de C e) aceleración angular de la barra BD f) aceleración de D



Solución C1:

La ecuacion de Bernouilli es $p + 1/2\ \rho\ v^2 + \rho g h$

Como está compuesta por la suma de tres términos, cada uno de ellos ha de tener las mismas dimensiones. Por tanto, las podemos estudiar por separado:

1) p : presión, definida como fuerza por unidad de superficie $\rightarrow$ $p = F / S$

$[F] = MLT^{-2}$
$[S] = L^2$

$[p] = MLT^{-2}\ L^{-2} = ML^{-1}T^{-2}$

2) $1/2\ \rho\ v^2$: veamos cada magnitud por separado:

ρ (densidad, definida como masa por unidad de volumen): $\rho = m / V$

$[\rho] = ML^{-3}$

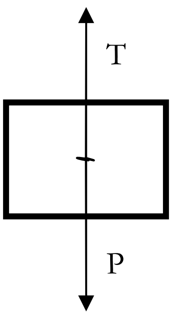
$[v]$ (velocidad) $= LT^{-1}$

$[1/2\ \rho\ v^2] = [\rho] \cdot [v]^2 = ML^{-3} \cdot L^2T^{-2} = ML^{-1}T^{-2}$

3) $[\rho g h] = [\rho] \cdot [g] \cdot [h] = ML^{-3} \cdot LT^{-2} \cdot L = ML^{-1}T^{-2}$

Como podemos observar, los tres términos tienen la mismas dimensiones, por tanto, es una ecuación homogénea dimensionalmente.

Solución C2:



En la vertical actúan dos fuerzas sobre el armario, el peso (P) y la tensión (T) de la cuerda. Según Newton:

$T - P = m\ a$

donde a es 4 m/s^2, $P = mg = 150 \cdot 9{,}8 = 1470$ N, siendo m = 150 Kg

$T = 150 \cdot 4 + 1470 = 2070$ N

La cuerda no aguantará el armario con esa aceleración del motor.

Solución P1:

Como A es punto fijo, su velocidad es nula : $v_A = 0$

La velocidad en B es posible calcularla a partir de A si considero B como un punto del sólido rígido AC:

$$v_B = v_A + w_{AC} \wedge r_{AB} = 0 + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3/4 & 0 \end{vmatrix} = -3\,i \ \ (m/s)$$

Para calcular tanto la velocidad de D como la velocidad angular de la barra BD, tomo como sólido rígido la propia barra BD, y comparo las velocidades de sus dos puntos extremos:

$$v_D = v_B + w_{BD} \wedge r_{BD} = -3\,i + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & w_{BD} \\ \cos 30 & \text{sen}30 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -3\,i + w_{BD}\cos 30\,j - w_{BD}\text{sen}30\,i = (-3 - w_{BD}\text{sen}30)\,i + w_{BD}\cos 30\,j$$

Como D sólo puede moverse en la dirección vertical (eje y) , igualamos componentes:

Eje OX: $0 = -3 - w_{BD}\text{sen}30 \rightarrow w_{BD} = -3 \cdot 2 = -6\,j$ rad/s (sentido horario)

Eje OY: $v_D = w_{BD}\cos 30 \rightarrow v_D = -6 \cdot \sqrt{3}/2 = -5{,}2\ j$ (m/s)

La velocidad de C vendrá dada por el sólido rígido AC:

$$v_C = v_A + w_{AC} \wedge r_{AC} = 0 + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -4\,i \quad (m/s)$$

Para hallar las aceleraciones angulares, me voy primero a la barra AC:

$$a_B = a_A + \alpha_{AC} \wedge r_{AC} - w_{AC}^2 \cdot r_{AC} = 0 + 0 - 4^2 \cdot 1\,j = -16\,j \quad (m/s^2)$$

$$a_D = a_B + \alpha_{BD} \wedge r_{BD} - w_{BD}^2 \cdot r_{BD} = -16\,j + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \alpha_{BD} \\ \cos30 & \operatorname{sen}30 & 0 \end{vmatrix} - 6^2 \cdot (\cos30\,i + \operatorname{sen}30\,j)$$

$$a_D = -16\,j + \alpha_{BD}\cos30\,j - \alpha_{BD}\operatorname{sen}30\,i - 36\cos30\,i - 36\operatorname{sen}30\,j$$

Igualando componentes, sabiendo que D sólo puede moverse en la dirección j :

Eje OX: $0 = -\alpha_{BD}\operatorname{sen}30 - 36\cos30 \rightarrow \alpha_{BD} = -62{,}35\,k \quad (rad/s^2)$

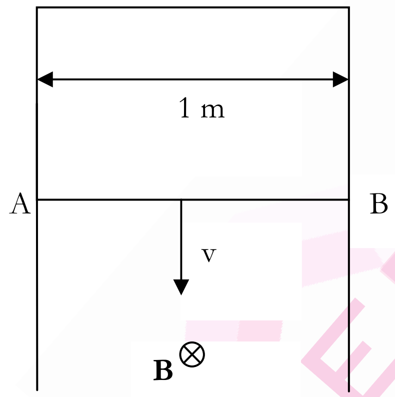
Eje OY: $a_D = -16 + \alpha_{BD}\cos30 - 36\operatorname{sen}30$

ELECTROMAGNETISMO

C1. (2,5 ptos).- Sean cuatro condensadores de 1,2,3 y 4 μF , respectivamente , que se asocian en paralelo, y se aplica una diferencia de potencial de 200 V. Hallar: a) capacidad equivalente b) carga en cada condensador c) energía total almacenada.

C2. (2,5 ptos).- Sea F(x,y,z) = (x+2y+4z) **i** + (2x-3y-z) **j** + (4x-y+2z) **k** un campo vectorial. Comprobar si es conservativo, y en caso afirmativo, hallar su función potencial.

P1. (5 ptos).- Tenemos dos varillas conductoras, paralelas y en posición vertical, unidas en su parte superior por otra tercera varilla de 1m de longitud, y un campo magnético uniforme de 0,2 T. Existe además una cuarta varilla (barra AB) que se desliza a velocidad constante entre las paralelas, por efecto de la gravedad, de masa 5 g y resistencia 10 Ω. Consideraremos que el resto de varillas no poseen masa, ni existe rozamiento entre ellas. En estas condiciones, hallar: a) velocidad de la varilla b) f.e.m. inducida c) intensidad inducida d) en caso de cambiar el sentido del campo magnético, ¿en qué afecta al problema?



Solución C1:

a) Asociación de condensadores en paralelo:

$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10\ \mu F$

b) Carga en cada condensador:

$Q_{eq} = C_{eq} \cdot V = 10 \cdot 10^{-6} \cdot 200 = 2\ mC$

donde la carga equivalente del paralelo es igual a la suma de cada una de las cargas:

$$Q_{eq} = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4$$

Y por otro lado,como están en paralelo, están sometidos al mismo potencial:

$$V = Q_1/C_1 = Q_2/C_2 = Q_3/C_3 = Q_4/C_4$$

con lo cual:

$Q_1 = C_1 \cdot V = 1 \cdot 10^{-6} \cdot 200 = 2 \cdot 10^{-4}\ C$

$Q_2 = C_2 \cdot V = 2 \cdot 10^{-6} \cdot 200 = 4 \cdot 10^{-4}\ C$

$Q_3 = C_3 \cdot V = 3 \cdot 10^{-6} \cdot 200 = 6 \cdot 10^{-4}\ C$

$Q_4 = C_4 \cdot V = 4 \cdot 10^{-6} \cdot 200 = 8 \cdot 10^{-4}\ C$

c) Energía total almacanada:

$$W = ½\ CV2 = ½\ 10 \cdot 10^{-6} \cdot (200)^2 = 0,2\ J$$

Solución C2:

El campo F(x,y,z) será conservativo si su rotacional es cero:

$$\textbf{rot F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x+2y+4z & 2x-3y-z & 4x-y+2z \end{vmatrix} = -\,\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k} - (-\,\mathbf{i}) - 4\,\mathbf{j} - 2\,\mathbf{k} = 0$$

Como efectivamente es conservativo, deriva de un potencial:

$$\mathbf{F} = -\,\mathbf{grad}\ V \rightarrow \quad F_x = -\,\partial V/\partial x \qquad F_y = -\,\partial V/\partial y \qquad F_z = -\,\partial V/\partial z$$

$$V = -\int (x+2y+4z)\,dx = -x^2/2 - 2xy - 4zx + f_1(y,z)$$

donde $f_1(y,z)$ es una función que comprende todos aquellos términos que no dependen de la variable x.

$$V = -\int (2x-3y-z)\,dy = -\,2xy + 3y^2/2 + zy + f_2(x,z)$$

donde $f_2(x,z)$ es una función que comprende todos aquellos términos que no dependen de la variable y.

$$V = -\int (4x-y+2z)\,dz = -\,4xz + zy - z^2 + f_3(x,y)$$

donde $f_3(x,y)$ es una función que comprende todos aquellos términos que no dependen de la variable z.

Juntando todos los términos, no comunes , y comunes sólo una vez, obtenemos la expresión de la función potencial:

$$V\,(x,y,z) = -x^2/2 - 2xy - 4xz + 3y^2/2 + yz - z^2 + cte$$

Solución P1:

a) El hecho de que la varilla AB baje a velocidad constante nos implica que la fuerza del peso se ve compensada por la fuerza magnética que genera el campo B sobre la espira:

$$mg = I \cdot L \cdot B = \varepsilon /_{R} \cdot L \cdot B$$

done I será la intensidad inducida , L la longitud de la varilla AB, B el campo, ε la fem inducida y R la resistencia de dicha varilla.

Por otro lado, el flujo magnético sobre un diferencial de longitud de la varilla será:

$$d\,\Phi_m = B \cdot dS = B \cdot dL \cdot vdt$$

y la fem inducida en ese diferencial de longitud será:

$$d\varepsilon = -\,d\,\Phi_m / dt = B \cdot dL \cdot v$$

que integrado para toda la longitude de la varilla:

$$\varepsilon = B \cdot L \cdot v$$

Ahora volvemos a la ecuación de Newton:

$$mg = (B \cdot L \cdot v) /_{R} \cdot L \cdot B \rightarrow v = Rmg / (LB)^2 = 10 \cdot 0{,}002 \cdot 9{,}8 / (1 \cdot 0{,}2)^2 = \underline{4{,}9\ m/s}$$

b) la fem inducida en la varilla será:

$$\varepsilon = B \cdot L \cdot v = 0{,}2 \cdot 1 \cdot 4{,}9 = 0{,}98\ V$$

c) la corriente inducida:

$$I = \varepsilon /_{R} = 0{,}98 / 10 = 0{,}098\ A$$

El sentido de esta corriente es antihorario

d) El hecho de cambiar el sentido del campo magnético, provoca un cambio también en el sentido de la corriente inducida, según la ley de Lenz. En cambio, la fuerza magnética seguiría siendo vertical hacia arriba, pues depende de los sentidos de I y de B, que ambos se invierten.

ÒPTICA

C1. (2.5 ptos).- Dada la ecuación de onda sonora p(x,t) = 0,1 sen [π (2x – 20t)] en unidades el S.I., calcular: a) la longitud de onda b) la frecuencia c) la velocidad de propagación d) el sentido de propagación e) valor máximo de la onda sonora f) la velocidad y la aceleración en el instante t = 1,5 s para una posición de x = 2 m.

C2. (2.5 ptos).- Por una rendija de 0,2 mm de anchura se hace pasar un haz láser de longitud de onda λ = 400 nm. A 10 metros de la rendija existe una pantalla detectora donde podemos observar el patrón de difracción. Calcular la distancia entre los dos primeros menores, así como el máximo de difracción central.

P1. (5 ptos).- Un objeto se hace pasar a través de dos lentes delgadas convergentes, la primera de focal 8 cm y la segunda de focal 3 cm. Si el objeto se sitúa a 15 cm de la primera lente, y la separación entre ambas es de 24 cm, calcular: a) la distancia de la segunda lente a la imagen b) las características de la imagen c) sistema equivalente, analítica y gráficamente.

Solución C1:

a) la ecuación es de la forma p(x,t) = A sen (kx – wt) donde k (nº de onda) es:

$k = {}^{2\pi}/_{\lambda} = 2\pi \;\rightarrow\; \lambda = 1$ (m)

b) la frecuencia la sacamos a partir de la pulsación w :

$w = 2\pi f \;\rightarrow\; w = 20\pi \;\rightarrow\; f = 20/2\pi = 10/\pi$ (Hz)

c) velocidad de propagación:

$v = \lambda \cdot f = 1 \cdot 10/\pi = 10/\pi$ (m/s)

d) el sentido de propagación es hacia el lado positivo del eje OX.

e) su valor máximo será cuando la función 'seno' sea 1, esto es $p_{max} = 0,1$ (Pa)

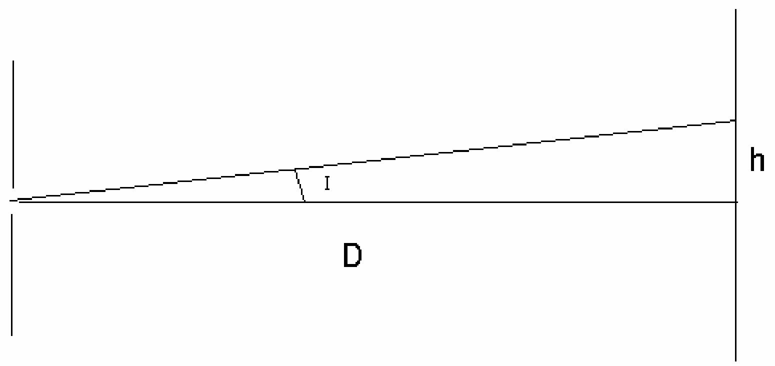
f) la velocidad es $v(x,t) = -0,1 \cdot 20\pi \cdot \cos(2\pi x - 20\pi t)$ (m/s)

$v(2,1'5) = -0,1 \cdot 20\pi \cdot \cos(2\pi \cdot 2 - 20\pi \cdot 1'5) = -0'91$ (m/s)

La aceleración es $a(x,t) = -0,1 \cdot (20\pi)^2 \cdot \text{sen}(2\pi x - 20\pi t)$ (m/s^2)

$a(2,1'5) = -0,1 \cdot (20\pi)^2 \cdot \text{sen}(2\pi \cdot 2 - 20\pi \cdot 1'5) = -390'6$ (m/s^2)

<u>Solución C2</u>:



La condición de mínimos en la difracción de Fraunhofer por una ranura de ancho d es:

$d \cdot \text{sen}\,\theta = m \cdot \lambda$ (m = 1,2,3…)

y como θ es pequeño, podemos hacer la aproximación :

$\text{sen}\,\theta = \text{tg}\,\theta = {}^{h}/_{D}$

sustiyendo en la condición de mínimo nos queda:

$d \cdot {}^{h}/_{D} = m \cdot \lambda$

Si consideramos la distancia entre los dos primeros menores (m = 1), y consideramos que esa distancia será 2h, nos queda:

$h = \lambda \cdot D / _{d} \quad \rightarrow \quad 2h = 2\lambda \cdot D / _{d}$

$2h = 2 \cdot 400 \cdot 10^{-9} \cdot 10 / 2 \cdot 10^{-3} = 4 \text{ mm}$

El máximo de difracción central será precisamente la misma que la distancia entre los dos primeros menores, esto es, 4 mm.

<u>Solución P1</u>:

a) El objeto a través de la lente L_1 nos dará la primera imagen:

a_1 = -15 cm
f_1' = 8 cm

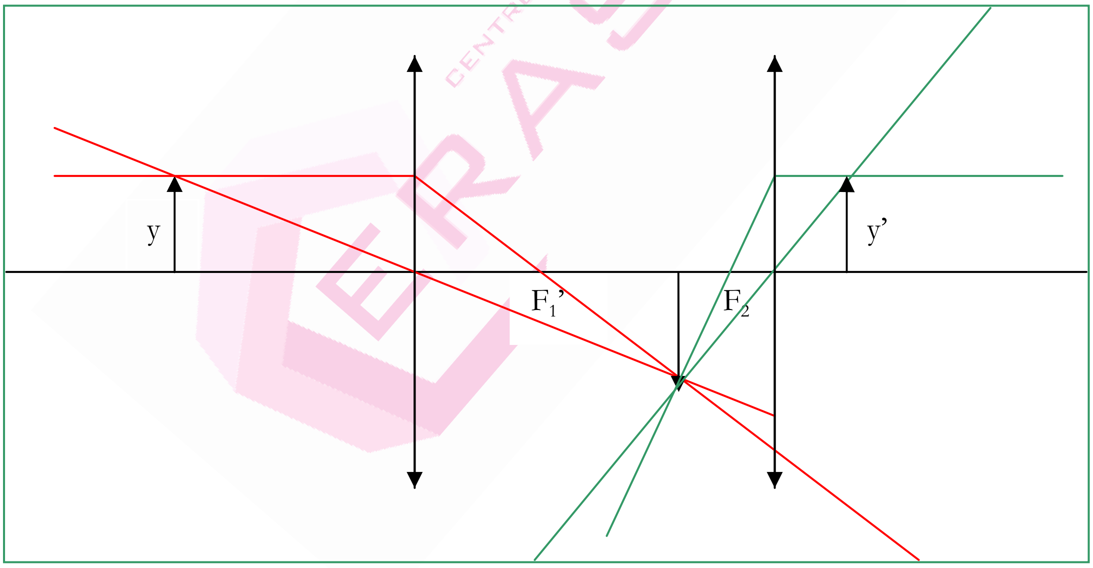
- (1/ -15) + 1/ a_1' = 1/ 8 → a_1' = 17,14 cm (distancia respecto de L_1)

Esta imagen a través de la segunda lente nos dará la imagen final:

$|a_2|$ = 24 – 17,14 = 6,86 cm

a_2 = - 6,86 cm
f_2' = 3 cm

-(1/ -6,86) + 1/ a_2' = 1/3 → a_2' = 5,33 cm (distancia respecto de la lente L_2)



b) El aumento lateral a través de L_1 es:

β_1 = a_1' / a_1 = 17'14 / -15 = -1,14 (real, invertida y de mayor tamaño que el objeto)

El aumento lateral a través de L_2 será:

$\beta_2 = a_2' / a_2 = 5{,}33 / -6{,}86 = -0{,}78$ (real, invertida y de menor tamaño que el objeto)

El aumento lateral total del sistema:

$\beta = \beta_1 \cdot \beta_2 = (-1{,}14) \cdot (-0{,}78) = 0{,}89$ (real, derecha y de menor tamaño que el objeto)

c) Sistema equivalente:

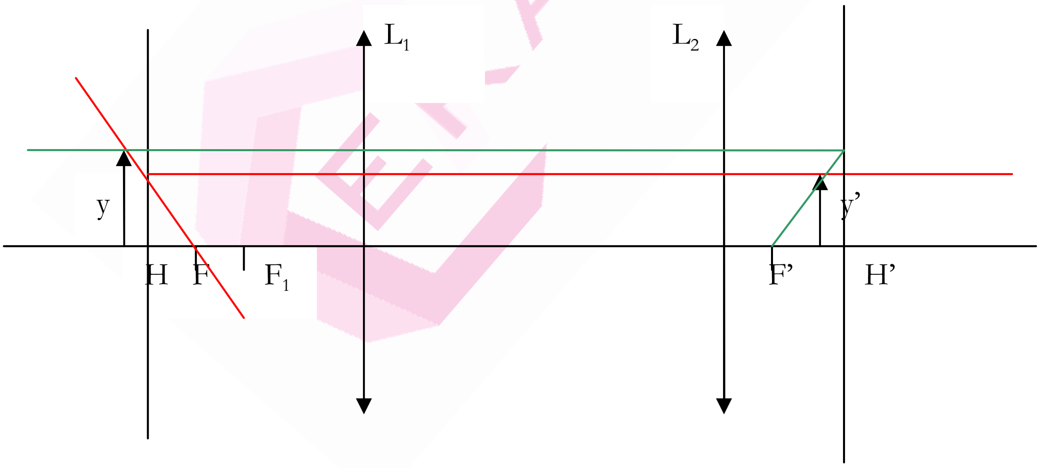
$\Delta = F_1'F_2 = 24 - 8 - 3 = 13$

$z = F_1F = f_1 \cdot f_1' / \Delta = (-8) \cdot 8 / 13 = -4{,}92$ cm

$z' = F_2'F' = -f_2 \cdot f_2' / \Delta = -(-3) \cdot 3 / 13 = 0{,}69$ cm

$f = HF = f_1 f_2 / \Delta = (-8) \cdot (-3) / 13 = 1{,}85$ cm

$f' = H'F' = -f_1' f_2' / \Delta = -8 \cdot 3 / 13 = -1{,}85$ cm



Fuente: enunciados correspondientes a exámenes de diferentes años de la Universidad Politécnica de Valencia.