

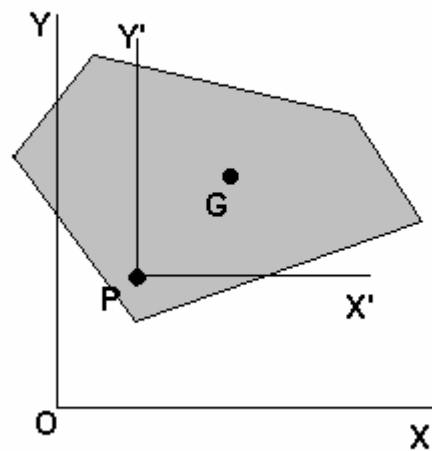
### EJERCICIO 1

En el sistema de referencia 0XYZ, la pieza homogénea plana mostrada en la figura tiene su centro de masas en el punto (2,3,0) m, y su matriz de inercia es

$$\{Y_0\}_{XYZ} = \begin{pmatrix} 200 & -50 & 0 \\ -50 & 300 & 0 \\ 0 & 0 & 500 \end{pmatrix} \text{ m}^4$$

Se pide, sabiendo que la superficie de la figura es 20 m<sup>2</sup>:

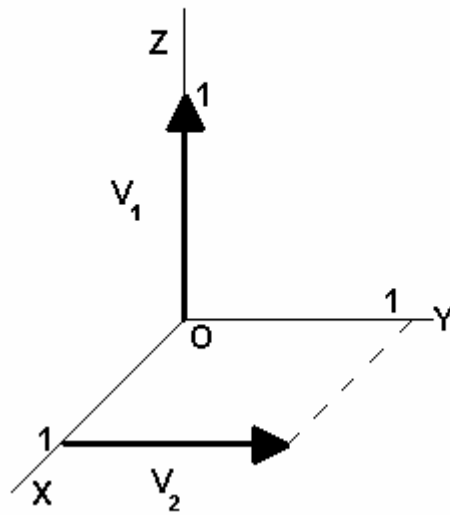
- 1) Matriz de inercia (geométrica) respecto a los ejes PX'Y'Z', donde P tiene coordenadas (1,2,0) m.
- 2) Momento de inercia respecto a una recta que pase por P y por G.
- 3) Si la masa es 5 kg calcular la matriz de inercia física en el sistema PX'Y'Z'



## EJERCICIO 2

Dado el sistema de vectores deslizantes de la figura  $\{(\vec{v}_1, P_1), (\vec{v}_2, P_2)\}$  se pide:

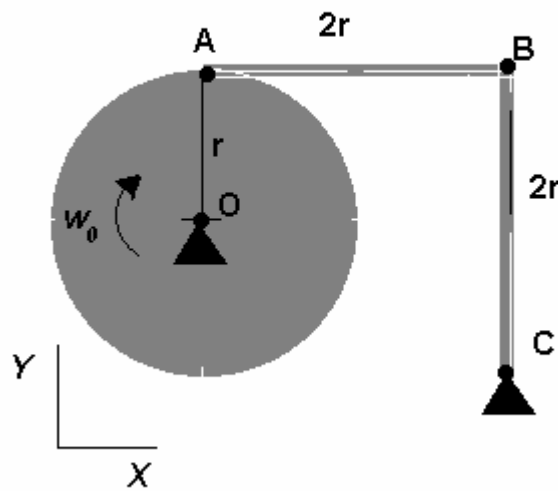
- 1) Resultante.
- 2) Momento principal.
- 3) Momento mínimo.
- 4) Eje central.



### EJERCICIO 3

En el instante que representa la figura, el disco gira con una velocidad angular constante  $\omega_0$ . Calcular:

- 1) CIR de las barras AB y BC, así como las velocidades de los puntos A y B.
- 2) Velocidades angulares de las barras AB y BC.
- 3) Aceleraciones angulares de las barras AB y BC.



## EJERCICIO 1, SOLUCIÓN

1) Aplicamos el teorema de Steiner a los momentos y productos de inercia, obteniendo:

$$\{Y_P\}_{X'Y'Z'} = \begin{pmatrix} 40 & 50 & 0 \\ 50 & 240 & 0 \\ 0 & 0 & 280 \end{pmatrix} \text{ m}^4$$

2) La dirección de la recta nos la da el vector unitario:

$$\vec{n} = \frac{\overrightarrow{PG}}{|\overrightarrow{PG}|} = \frac{(1,1,0)}{\sqrt{2}}$$

Aplicando el teorema de Poincot:

$$J_{PG} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 40 & 50 & 0 \\ 50 & 240 & 0 \\ 0 & 0 & 280 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 190 \text{ m}^4$$

3)  $J(\text{físico}) = (\text{masa/superficie}) J(\text{geométrico}) = (5 \text{ kg}/20 \text{ m}^2) J(\text{geométrico})$

$$\{Y_P\}_{X'Y'Z'} = \begin{pmatrix} 10 & 125 & 0 \\ 125 & 60 & 0 \\ 0 & 0 & 70 \end{pmatrix} \text{ Kg m}^2$$

## EJERCICIO 2, SOLUCIÓN

El sistema de vectores es, a partir de la figura:

$$\vec{v}_1 = (0,0,1) , P_1(0,0,0)$$

$$\vec{v}_2 = (0,1,0) , P_2(1,0,0)$$

1) Resultante

$$\vec{R} = (0,1,1)$$

2) Momento resultante

$$\vec{M}_0 = \vec{M}_0(\vec{v}_1) + \vec{M}_0(\vec{v}_2) = (0,0,1)$$

3) Momento mínimo

$$\vec{M}_m = \frac{\vec{M}_0 \cdot \vec{R}}{|\vec{R}|^2} \cdot \vec{R} = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

4) Sea  $E(x,y,z)$  punto del eje central, entonces  $\vec{M}_E = \vec{M}_m$ , así aplicando la ecuación de campo de momentos, este punto la ecuación de la recta que corresponde con la ecuación del eje central:

$$y = z ; x = -1$$

### EJERCICIO 3, SOLUCIÓN

- 1) Por análisis gráfico del sistema:

CIR de la barra AB: en el infinito

CIR de la barra BC: el punto C

Además aplicando el campo de velocidades para un sólido rígido, se obtiene, teniendo en cuenta que los puntos O y C no se mueven:

$$\vec{v}_A = \omega_0 r \cdot \vec{i} \quad \text{y} \quad \vec{v}_B = \omega_0 r \cdot \vec{i}$$

- 2) Aplicando el campo de velocidades:  $\vec{\omega}_{AB} = 0$  ;  $\vec{\omega}_{BC} = -\frac{\omega_0}{2} \vec{k}$  (este resultado se obtiene ya en el apartado anterior).

- 3) Aplicando el campo de aceleraciones para un sólido rígido, se obtiene (teniendo en cuenta que los puntos O y C no se mueven):

$$\vec{\alpha}_{AB} = \frac{3}{4} \omega_0^2 \vec{k} \quad ; \quad \vec{\alpha}_{BC} = 0$$