

### Teoría 1

1º ¿Cuáles son las magnitudes fundamentales en el S.I.? ¿Y en el sistema técnico o terrestre? ¿Cuál es la relación del peso de una masa patrón entre los dos sistemas? Comentar el resultado.

2º Sabiendo que en la caída de un cuerpo, el tiempo de dicha caída es función de la altura que va perdiendo y de la gravedad, hacer un estudio dimensional y aproximar a una fórmula.

3º El  $\text{dyn/cm}^2$  ¿en qué sistema estamos trabajando? ¿De qué magnitud es unidad? ¿Cuál es su equivalencia en el sistema internacional?

4º Dada la ecuación  $Q = m \cdot c_e \cdot \Delta T$  de la termodinámica, donde  $Q$  representa el calor,  $m$  la masa,  $c_e$  el calor específico y  $\Delta T$  la variación de la temperatura. Mediante un estudio dimensional, hallar las unidades de  $c_e$  en el S.I.

### Teoría 2

Dado un sistema discreto de vectores deslizantes  $\{A_i, \mathbf{a}_i\}$   $i = 1, 2, \dots, n$  donde  $A_i$  representa el punto de aplicación del vector  $\mathbf{a}_i$ , en un sistema referencial cartesiano  $\{O, x, y, z\}$ , calcular:

1º Expresión general del momento planario de orden 0.

2º Expresión matricial-referencial del momento planario de orden 1.

3º Momento polar o central.

4º Relación del momento central con el vector de Darboux.

5º Torsor del sistema.

6º Momento mínimo.

7º Si el sistema de vectores deslizantes es coplanario, calcula sus invariantes. ¿Dónde se situará el eje central del sistema?

### Teoría 3

1º Enunciar el principio de D'Alembert. ¿Qué fuerzas pueden actuar sobre el sistema?

2º ¿Cuáles son las coordenadas generalizadas de un sistema? Establecer una relación de dichas coordenadas, dependiendo si se trata de un sólido rígido o una partícula, si estamos en 2-D o en 3-D.

3º ¿Qué es un grado de libertad? ¿Qué relación existe entre los grados de libertad y las ligaduras de un sistema formado por  $n$  sólidos rígidos,  $m$  partículas y  $g$  ligaduras? ¿Cuándo puedo decir que se trata de un mecanismo, o una estructura?

4º Clasificación de las ligaduras.

5º En el caso en que tengamos un empotramiento en 2-D, ¿cuántas coacciones tendremos? Hacer un esquema de las reacciones que aparecen en dicho enlace.

### Teoría 4

1º Definir el tensor de tensiones en un punto. ¿Por qué componentes está formado?

2º Definir el tensor de presiones para un fluido en reposo. ¿Por qué componentes está formado? ¿A qué se deben los signos negativos?

3º Enunciar la ecuación fundamental de la hidrostática. ¿Cómo podemos relacionar la presión a una profundidad z de la superficie libre de un fluido de peso específico  $\gamma$ ?

4º Hacer un esquema del prisma de presiones que un fluido ejerce sobre una pared inclinada  $60^\circ$  respecto de la horizontal. ¿Qué representa el volumen de dicho prisma? ¿Qué es el eje central del prisma de presiones? ¿Y el centro de presiones? ¿Qué relación existe entre el centro de presiones y el centro de gravedad de la pared?

### Problema 1

Sea un sistema de vectores deslizantes respecto de un sistema referencial triortonormal  $\{O,x,y,z\}$  formado por:

$$\mathbf{a} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{vmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix}; \quad \mathbf{c} = \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

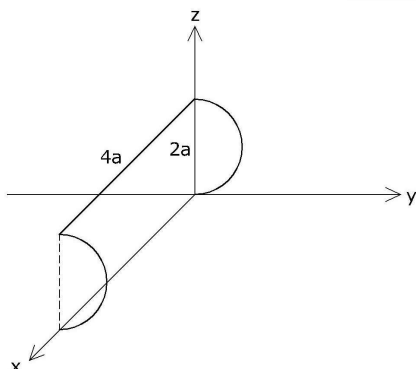
siendo  $A(0,1,2)$ ,  $B(0,0,1)$  y  $C(0,-1,0)$  los puntos de aplicación respectivos de cada uno de ellos. Hallar:

- 1º Momento planario de orden 0 del sistema.
- 2º Momento planario de orden 1 del sistema.
- 3º Torsor del sistema.
- 4º Momento mínimo.
- 5º Eje central.
- 6º Momento respecto del punto  $Q(1,1,1)$

## Problema 2

Una varilla de masa y sección despreciable está formada por un tramo recto de longitud  $4a$  y dos tramos curvos, de diámetro  $2a$ , tal como muestra la figura. Hallar, respecto al referencial triortonormal indicado:

- 1º El centro geométrico de la figura.
- 2º Matriz de momentos planarios de segundo orden.
- 3º Tensor de inercia en el origen.
- 4º El momento de inercia axial respecto a la trisectriz del primer octante.



## Soluciones:

### Teoría 1:

1º Magnitudes del S.I.: longitud (metro), masa (kilogramo), tiempo (segundo), intensidad de corriente eléctrica (amperio), temperatura (kelvin), cantidad de sustancia (mol) y la intensidad luminosa (candela). En paréntesis están citadas las unidades de cada magnitud.

Magnitudes del sistema técnico o terrestre: longitud (metro), fuerza (kilopondio o kilogramo-fuerza) y tiempo (segundo).

El peso en el S.I. es una magnitud derivada que sacaremos a partir de la relación  $P = mg = 1 \cdot 9,81 = 9,81 \text{ N}$ , donde 1 kg sería la masa patrón en el S.I. En el sistema técnico, el peso de la masa patrón es por definición la unidad de fuerza o kilopondio o kilogramo-fuerza. Por tanto:

$$1 \text{ kp} = 9,81 \text{ N}$$

Así, ambos valores expresan el peso de la misma masa patrón, de 1kg en el S.I. , siendo en el sistema técnico la UTM (unidad técnica de masa), ya que carece de un nombre específico para representar la unidad de una masa.

$$2^\circ \quad t = f(h, g) \quad \rightarrow \quad \text{Análisis dimensional :} \quad [t] = [h]^\alpha \cdot [g]^\beta$$

Dimensiones de los términos :

$$[t] = T \quad [h] = L \quad [g] = LT^{-2}$$

Sustituyendo en la ecuación:

$$T = (L)^\alpha \cdot (LT^{-2})^\beta = L^\alpha \cdot L^\beta \cdot T^{-2\beta} = L^{\alpha+\beta} \cdot T^{-2\beta}$$

Si identificamos exponentes a ambos lados de la igualdad, obtenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha + \beta \\ 1 &= -2 \cdot \beta \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \beta = -\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad [h] = [h]^{\frac{1}{2}} \cdot [g]^{-\frac{1}{2}}$$

Obtenemos como resultado:

$$t = K \cdot \sqrt{(h/g)} \quad \text{siendo K una constante de proporcionalidad}$$

3º El dyn/cm<sup>2</sup> es unidad de presión, en el sistema c.g.s. En el S.I. la unidad es el Pascal (N/m<sup>2</sup>).

4º Vamos a hacer un análisis dimensional de la ecuación  $Q = m \cdot c_e \cdot \Delta T$ , con el objetivo de encontrar las unidades del calor específico  $c_e$ .

$$[Q] = [m] \cdot [c_e] \cdot [\Delta T]$$

Las dimensiones de las magnitudes en juego son:

$$[Q] = (\text{dimensiones de energía}) = ML^2T^{-2}$$

$$[m] = M \text{ (masa, magnitud fundamental)}$$

$$[\Delta T] = K \text{ (kelvin, magnitud fundamental)}$$

Si despejamos  $c_e$  de la ecuación dimensional:

$$[c_e] = [Q] \cdot [m]^{-1} \cdot [\Delta T]^{-1} \quad \rightarrow \quad [c_e] = ML^2T^{-2} \cdot M^{-1} \cdot K^{-1} = L^2T^{-2}K^{-1}$$

Unidades del calor específico en el S.I. :

$$c_e = m^2/s^2K$$

### Teoría2:

1º Momento planario de orden 0:

$$\text{M.P. (n=0)} = \sum \mathbf{a}_i = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \dots + \mathbf{a}_n = \mathbf{R}$$

2º Expresión matricial-referencial del momento planario de orden 1:

$$\sum \mathbf{a}_i * \mathbf{r}_i = \sum \mathbf{a}_i * \mathbf{OA}_i = \sum \begin{vmatrix} a_{xi} \\ a_{yi} \\ a_{zi} \end{vmatrix} * (A_{xi} \ A_{yi} \ A_{zi}) = \begin{vmatrix} a_{xi}A_{xi} & a_{xi}A_{yi} & a_{xi}A_{zi} \\ a_{yi}A_{xi} & a_{yi}A_{yi} & a_{yi}A_{zi} \\ a_{zi}A_{xi} & a_{zi}A_{yi} & a_{zi}A_{zi} \end{vmatrix}$$

3º Momento polar o central:

$$\mathbf{M}_o = \sum \mathbf{OA}_i \times \mathbf{a}_i = \sum \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_{xi} & A_{yi} & A_{zi} \\ a_{xi} & a_{yi} & a_{zi} \end{vmatrix}$$

4º Relación del momento central con el vector de Darboux:

$$\mathbf{M}_o = \sum \mathbf{OA}_i \times \mathbf{a}_i = - \sum \mathbf{a}_i \times \mathbf{OA}_i = 2 \cdot \mathbf{v}_{\text{asoc}}$$

donde  $\mathbf{v}_{\text{asoc}}$  es el vector asociado de Darboux, que se relaciona a partir del producto vectorial de dos vectores, de la forma:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -2 \cdot \mathbf{v}_{\text{asoc}}$$

5º Torsor del sistema:

$$\Gamma_o = \{ \mathbf{R}, \mathbf{M}_o \}$$

donde  $\mathbf{R} = \sum \mathbf{a}_i$  es la resultante del sistema y  $\mathbf{M}_o$  es el momento central calculado en el apartado 3º.

6º Momento mínimo:

$$\mathbf{m} = [ (\mathbf{M}_o \cdot \mathbf{R}) / \mathbf{R}^2 ] \cdot \mathbf{R} = [ 2(\mathbf{v}_{\text{asoc}} \cdot \mathbf{R}) / \mathbf{R}^2 ] \cdot \mathbf{R}$$

7º Invariantes de un S.V.D. coplanarios:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \sum \mathbf{a}_i \\ \mathbf{M} \cdot \mathbf{R} &= 0 \\ \mathbf{m} &= 0 \end{aligned}$$

El segundo y tercer invariantes del sistema son nulos.  
El eje central será un eje también coplanario con los vectores  $\mathbf{a}_i$ .

Teoría 3:

1º El principio de D'Alembert establece que el trabajo virtual ejercido por las fuerzas efectivas que actúan sobre el sistema, a través de desplazamientos virtuales infinitesimales compatibles con las restricciones de dicho sistema, es nulo.

$$\delta W = \sum ( m_i \cdot \mathbf{a}_i - \mathbf{F}_i ) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$

las fuerzas que actúan pueden ser:

- a) **Fuerzas exteriores**, que serán fuerzas originadas por elementos ajenos al sistema material considerado, en su interacción con el mismo. Pueden ser fuerzas de enlace con otros sistemas o subsistemas, o fuerzas aplicadas sobre el sistema.
- b) **Fuerzas internas**, originadas por fuerzas de interacción entre los puntos materiales, subsistemas o elementos del sistema mecánico. Son, por ejemplo, las interacciones atómicas o moleculares, o interacciones ajenas.

La suma de todas las fuerzas externas e internas nos dará la **resultante** del sistema.

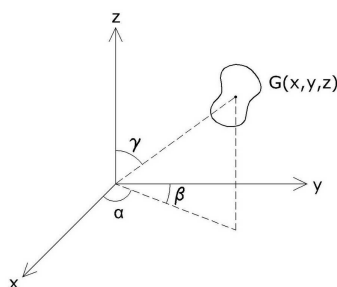
2º Las coordenadas generalizadas son aquellos parámetros necesarios para definir completa e unívocamente un sistema a estudio, en un referencial dado.

Si el sistema es una partícula en 2-D, basta con definir dos parámetros (x,y) en un referencial cartesiano ortonormal {O,x,y}. La partícula queda perfectamente posicionada en cada instante por las coordenadas generalizadas x e y.

En cambio, si estamos tratando una partícula en 3-D, necesitaremos tres coordenadas generalizadas para definir la partícula en cada instante: (x,y,z)

Si el sistema es un sólido rígido en 2-D, necesitaremos no sólo dos coordenadas de posición, sino dos ángulos de referencia de giro respecto los ejes cartesianos del referencial {O,x,y}. Necesitaremos por tanto 4 coordenadas generalizadas.

Sin embargo, si el sólido rígido es en 3-D, necesitaremos en total 6 coordenadas generalizadas para definir tanto la posición como la orientación del sólido respecto al referencial {O,x,y,z}. Estas coordenadas son (x,y,z,α,β,γ).



3º Los grados de libertad de un sistema será el número de coordenadas generalizadas libres o independientes del sistema, esto es, que tienen total libertad de movimiento en la variable asociada a dicha coordenada generalizada.

Si tenemos  $n$  sólidos rígidos,  $m$  partículas y  $g$  ligaduras, el número de grados de libertad del sistema total es:

$$\text{grados de libertad} = 6 \cdot n + 3 \cdot m - g$$

Si el número de grados de libertad es uno o mayor que uno, el sistema puede considerarse como un mecanismo. En caso que sea igual a cero, el sistema se considera una estructura.

4º Podemos clasificar las ligaduras en tres grupos diferentes:

Grupo 1: (según aparezca explícitamente o no la variable tiempo)

- Esclerónomas: En la ligadura no aparece explícitamente  $t$ .
- Reónomas: En la ligadura aparece explícitamente  $t$ .

Grupo 2: (según aparezcan explícitamente o no las velocidades)

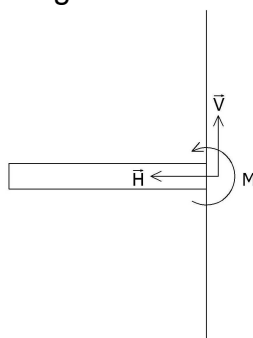
- Holónomas: Dependen de las posiciones y/o del tiempo, pero no dependen de las velocidades.
- No holónomas: Aparecen las velocidades, aunque también pueden aparecer las posiciones y el tiempo.

Grupo 3: (según impidan o no el movimiento)

- Propias: impiden el movimiento (correctamente ligado).
- Impropias: no impiden el movimiento (incorrectamente ligado).

5º En un empotramiento en 2-D, el número de coacciones serán 3, y no tendremos ningún grado de libertad. Un esquema de las reacciones del empotramiento sería:

Tenemos por tanto dos fuerzas de reacción, una horizontal y otra vertical, y un momento de reacción que impide el giro:



Teoría 4:

1º Definimos el tensor de tensiones  $\sigma$  como una matriz 3x3 formada en la diagonal principal por la componente normal a la superficie  $dF_n / dS$  en las tres direcciones  $x,y,z$ , mientras que las componentes tangenciales  $dF_t / dS$  (de cizalladura) en los tres ejes están colocados en los términos cruzados de dicha matriz, de tal forma que la matriz es una matriz simétrica de la forma:

$$\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix}$$

2º El tensor de presiones para un fluido en reposo, sólo las componentes normales son distintas de cero, mientras que las componentes tangenciales (de cizalladura) son todas cero, de tal forma que el tensor de tensiones es todo 'ceros', salvo en la diagonal principal, donde los términos serían:

$$\sigma_{xx} = -p_x \quad \sigma_{yy} = -p_y \quad \sigma_{zz} = -p_z$$

que son las componentes de la presión en las tres direcciones de los ejes  $x,y,z$ . Por simetría, la presión en un punto es la misma en cualquier dirección, con lo que tenemos que el tensor de tensiones para un fluido es:

$$\sigma = \begin{vmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{vmatrix}$$

el signo negativo es debido a que la presión es una tensión normal de compresión, y no de tracción.

3º Ecuación fundamental de la hidrostática:

$$\text{grad } P - \rho \cdot \mathbf{g} = 0$$

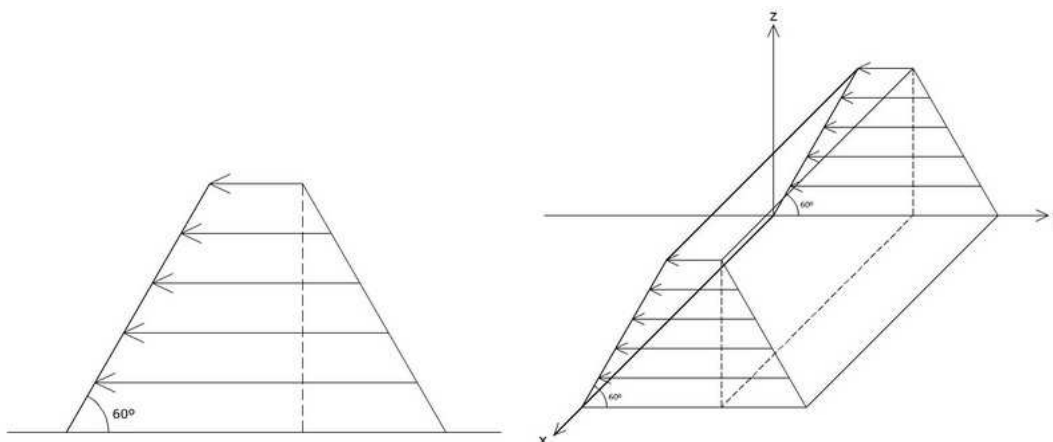
donde  $P$  representa el peso,  $\rho$  la densidad del fluido y  $g$  la gravedad. Se trata de una ecuación vectorial.

Para calcular la presión  $p$  a una profundidad  $z$  de la superficie libre de un fluido de peso específico  $\gamma$ :

$$p = p_0 + \rho \cdot g \cdot z = p_0 + \gamma \cdot z$$

donde  $p_0$  es la presión atmosférica (en la superficie libre del fluido),  $\rho$  es la densidad del fluido,  $g$  la gravedad,  $\gamma (= \rho \cdot g)$  el peso específico, y  $z$  es la profundidad a la que está el punto cuya presión queremos calcular. Se trata de una ecuación escalar.

4º Prisma de presiones que un fluido ejerce sobre una pared inclinada 60º respecto de la horizontal:



El **volumen** del prisma de presiones me dará la magnitud de la fuerza total que el fluido ejerce sobre la pared.

El **eje central** del prisma de presiones será el eje por el cual representaremos la fuerza, como vector, equivalente a la fuerza total que el fluido ejerce sobre la pared.

El **centro de presiones** será el punto de aplicación de esa fuerza (vector) contra la pared, esto es, el punto de corte del eje central del prisma con la pared. Generalmente no coincidirá con el centro de gravedad de la pared, es más, el centro de presiones se situará por debajo (a mayor profundidad) del centro de gravedad.

Problema 1:

1º Momento planario de orden 0:

$$M.P. (n=0) = \sum v_i = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

2º Momento planario de orden 1:

$$M.P. (n=1) = \sum v_i * OP_i = \mathbf{a} * \mathbf{OA} + \mathbf{b} * \mathbf{OB} + \mathbf{c} * \mathbf{OC}$$

$$\mathbf{OA} = A - O = (0,1,2) - (0,0,0) = (0,1,2)$$

$$\mathbf{OB} = B - O = (0,0,1) - (0,0,0) = (0,0,1)$$

$$\mathbf{OC} = C - O = (0,-1,0) - (0,0,0) = (0,-1,0)$$

$$\begin{aligned}
 \text{M.P. (n=1)} &= \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} * (0,1,2) + \begin{vmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix} * (0,0,1) + \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix} * (0,-1,0) = \\
 &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \\
 &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

3º Torsor del sistema:  $\Gamma_o = \{ \mathbf{R}, \mathbf{M}_o \}$

donde  $\mathbf{R}$  es la resultante, suma de los vectores, que equivale al M.P. (n=0) :

$$\mathbf{R} = \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

y  $\mathbf{M}_o$  es el momento polar del sistema respecto del origen O:

$$\mathbf{M}_o = \sum \mathbf{OP}_i \times \mathbf{v}_i = \mathbf{OA} \times \mathbf{a} + \mathbf{OB} \times \mathbf{b} + \mathbf{OC} \times \mathbf{c} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix} + \\
 &+ \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix} = \\
 &= \begin{vmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

Por tanto ya tenemos el torsor:  $\Gamma_o = \left\{ \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix} \right\}$

4º Momento mínimo:

$$\mathbf{m} = (\mathbf{M} \cdot \mathbf{R} / R^2) \cdot \mathbf{R} = (-4+2 / \sqrt{6}) \cdot \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} = -2/\sqrt{6} \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

5º Eje central:

A partir de la ecuación campo de momentos:

$$\mathbf{M}_E = \mathbf{m} = \mathbf{M}_o + \mathbf{EO} \times \mathbf{R}$$

donde  $\mathbf{M}_E$  es el momento polar en un punto  $E(x,y,z)$  del eje central, de coordenadas desconocidas, que es justamente el momento mínimo  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{M}_o$  es el momento en el origen, ya calculado, y  $\mathbf{R}$  la resultante. La ecuación queda:

$$-2/\sqrt{6} \cdot \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

de esta ecuación saco las dos ecuaciones correspondientes a dos planos, cuya intersección es la recta del eje central:

$$\begin{aligned} -4/\sqrt{6} &= -2 + z - y & \rightarrow & z - y = -4/\sqrt{6} + 2 \\ -2/\sqrt{6} &= 2 - 2z + x & \rightarrow & x - 2z = -2/\sqrt{6} - 2 \end{aligned}$$

6º Momento respecto del punto Q (1,1,1)

A partir de la ecuación campo de momentos:

$$\mathbf{M}_Q = \mathbf{M}_o + \mathbf{QO} \times \mathbf{R}$$

donde  $\mathbf{QO} = \mathbf{O} - \mathbf{Q} = (0,0,0) - (1,1,1) = (-1,-1,-1)$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_Q &= \begin{vmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Problema 2:

1º Para calcular el centro geométrico del sistema, he de hallar primero los momentos planarios de orden 0 y 1. El sistema está formado por tres elementos continuos, de variable escalar  $\ell$  (unidimensional), que son:

- Un tramo recto de longitud  $4a$ .
- Un tramo curvo de radio  $a$  en el plano YZ.
- Otro tramo curvo de radio  $a$  en el plano  $z = 4a$ .

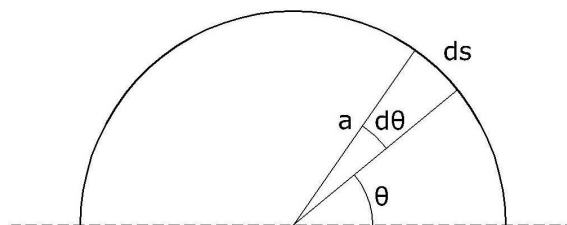
a) Tramo recto:

M.P. (n=0) = longitud de la varilla =  $\ell_1 = 4a$

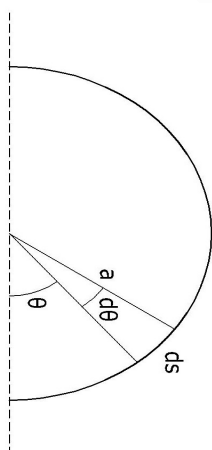
$$\begin{aligned} \text{M.P. (n=1)} &= \mathbf{U}_{01} = \int d\ell * \mathbf{r} = \int dx * \begin{vmatrix} x \\ 0 \\ 2a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} [x^2/2]_0^{4a} \\ 0 \\ 2a[x]_0^{4a} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} 8a^2 \\ 0 \\ 8a^2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

b) Tramo curvo en el plano YZ:

M.P. (n=0) = longitud de la varilla =  $\ell_2 = \frac{1}{2} \cdot 2\pi r = \pi r$



Para calcular el momento planario de primer orden, utilizo las coordenadas esféricas, a través de la variable  $\theta$ . Para este tramo, el semicírculo está girado respecto a la figura anterior:



El centro del semicírculo es el punto  $(0,0,a)$ . Por tanto, un diferencial de arco  $ds = a \cdot d\theta$  genérico, tal como muestra en la nueva figura, tendrá de coordenadas  $r = (0, \text{sen}\theta, a - \text{cos}\theta)$ .

$$\text{M.P. (n=1)} = \mathbf{U}_{02} = \int ds * \mathbf{r} = \int a d\theta * \begin{vmatrix} 0 \\ a \text{sen}\theta \\ a - \text{cos}\theta \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 \\ a^2[-\cos\theta]_0^\pi \\ a[a\theta - a\sin\theta]_0^\pi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 2a^2 \\ a^2\pi \end{vmatrix}$$

c) Tramo curvo en el plano  $z = 4a$  :

$$M.P. (n=0) = \text{longitud de la varilla} = \ell_3 = \frac{1}{2} \cdot 2\pi r = a\pi$$

El trato del momento planario de primer orden es igual que el tramo anterior, pero considerando que  $x = 4a$  :

$$M.P. (n=1) = \mathbf{U}_{03} = \int ds * \mathbf{r} = \int a d\theta * \begin{vmatrix} 4a \\ a\sin\theta \\ a - a\cos\theta \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 4a^2\pi \\ a^2[-\cos\theta]_0^\pi \\ a[a\theta - \sin\theta]_0^\pi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4a^2\pi \\ 2a^2 \\ a^2\pi \end{vmatrix}$$

El centro de gravedad del sistema estará dado por la expresión:

$$r_G = (\sum \mathbf{U}_{oi}) / (\sum \ell_i) = (\mathbf{U}_{o1} + \mathbf{U}_{o2} + \mathbf{U}_{o3}) / (\ell_1 + \ell_2 + \ell_3)$$

$$\mathbf{U}_{o1} + \mathbf{U}_{o2} + \mathbf{U}_{o3} = \begin{vmatrix} 8a^2 \\ 0 \\ 8a^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 2a^2 \\ a^2\pi \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4a^2\pi \\ 2a^2 \\ a^2\pi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (8 + 4\pi)a^2 \\ 4a^2 \\ (8 + 2\pi)a^2 \end{vmatrix}$$

$$\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 = 4a + a\pi + a\pi = (4 + 2\pi)a$$

$$r_G = [1 / (2 + \pi)] \cdot \begin{vmatrix} (4+2\pi)a \\ 2a \\ (4+\pi)a \end{vmatrix}$$

2º Matriz de momentos planarios de segundo orden:

a) Tramo recto:

$$\begin{aligned}
 [J]_{o1} &= \int dl * (\mathbf{r} * \mathbf{r}) = \int dx * \begin{vmatrix} x \\ 0 \\ 2a \end{vmatrix} * [x \ 0 \ 2a] = \int dx * \begin{vmatrix} x^2 & 0 & 2ax \\ 0 & 0 & 0 \\ 2ax & 0 & 4a^2 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} [x^3/3]_0^{4a} & 0 & 2a[x^2/2]_0^{4a} \\ 0 & 0 & 0 \\ 2a[x^2/2]_0^{4a} & 0 & 4a^2[x]_0^{4a} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 64a^3/3 & 0 & 16a^3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 16a^3 & 0 & 16a^3 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

b) Tramo curvo en el plano YZ:

$$\begin{aligned}
 [J]_{o2} &= \int dl * (\mathbf{r} * \mathbf{r}) = \int a d\theta * \begin{vmatrix} 0 \\ a \sin\theta \\ a - a \cos\theta \end{vmatrix} * [0 \ a \sin\theta \ a - a \cos\theta] = \\
 &= \int a d\theta * \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 \sin^2\theta & a^2 \sin\theta - a^2 \cos\theta \sin\theta \\ 0 & a^2 \sin\theta - a^2 \cos\theta \sin\theta & (a - a \cos\theta)^2 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pi a^3/2 & 2a^3 \\ 0 & 2a^3 & 3\pi a^3/2 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

c) Tramo curvo en el plano z = 4a :

$$\begin{aligned}
 [J]_{o3} &= \int dl * (\mathbf{r} * \mathbf{r}) = \int a d\theta * \begin{vmatrix} 4a \\ a \sin\theta \\ a - a \cos\theta \end{vmatrix} * [4a \ a \sin\theta \ a - a \cos\theta] = \\
 &= \int a d\theta * \begin{vmatrix} 16a^2 & 4a^2 \sin\theta & 4a^2 - 4a^2 \cos\theta \\ 4a^2 \sin\theta & a^2 \sin^2\theta & a^2 \sin\theta - a^2 \cos\theta \sin\theta \\ 4a^2 - 4a^2 \cos\theta & a^2 \sin\theta - a^2 \cos\theta \sin\theta & (a - a \cos\theta)^2 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 16\pi a^3 & 8a^3 & 4\pi a^3 \\ 8a^3 & \pi a^3/2 & 2a^3 \\ 4\pi a^3 & 2a^3 & 3\pi a^3/2 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

La matriz de momentos planarios de segundo orden será:

$$\begin{aligned}
 [J]_o &= [J]_{o1} + [J]_{o2} + [J]_{o3} = \begin{vmatrix} 64a^3/3 & 0 & 16a^3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 16a^3 & 0 & 16a^3 \end{vmatrix} + \\
 &+ \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pi a^3/2 & 2a^3 \\ 0 & 2a^3 & 3\pi a^3/2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 16\pi a^3 & 8a^3 & 4\pi a^3 \\ 8a^3 & \pi a^3/2 & 2a^3 \\ 4\pi a^3 & 2a^3 & 3\pi a^3/2 \end{vmatrix} = \\
 &= \begin{vmatrix} (64/3 + 16\pi)a^3 & 8a^3 & (16+4\pi)a^3 \\ 8a^3 & \pi a^3 & 4a^3 \\ (16+4\pi)a^3 & 4a^3 & (16+3\pi)a^3 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

3º Tensor de inercia en el origen:

Para calcular el tensor de inercia en el origen utilizamos la expresión:

$$[I]_o = \text{tr} [J]_o \cdot [\delta] - [J]_o$$

donde  $\text{tr} [J]_o$  es la traza de la matriz de los momentos planarios de segundo orden y  $[\delta]$  es la matriz unidad. Así:

$$\text{tr} [J]_o = (64/3 + 16\pi + \pi + 16 + 3\pi) a^3 = (112/3 + 20\pi) a^3$$

$$[I]_o = \begin{vmatrix} (48/3 + 4\pi)a^3 & -8a^3 & -(16+4\pi)a^3 \\ -8a^3 & (112/3 + 19\pi)a^3 & -4a^3 \\ -(16+4\pi)a^3 & -4a^3 & (64/3 + 17\pi)a^3 \end{vmatrix}$$

4º El momento de inercia axial respecto a la trisectriz del primer octante:

Para calcular el momento de inercia axial respecto de cualquier recta que pase por el origen, utilizamos la siguiente expresión:

$$I_r = \mathbf{r} \cdot [I]_o \cdot \mathbf{r}$$

donde  $\mathbf{r}$  es el vector unitario de la recta cuyo momento queremos calcular. En particular, para la trisectriz del primer octante, su vector director unitario es:

$$\mathbf{r} = 1/\sqrt{3} \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

si sustituimos los datos en la expresión de  $I_r$  :

$$I_r = 1/\sqrt{3} \cdot [1,1,1] * [I]_o * 1/\sqrt{3} \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} = 56/9 + 32\pi/3$$

Fuente: enunciados correspondientes a exámenes de diferentes años de la Universidad Politécnica de Valencia.