

1. 200 gramos de hielo a -5°C se calientan a una presión constante de 2 atm. hasta alcanzar una temperatura ambiente de 20°C . Calcular la variación de energía interna de este proceso. (Datos: $C_{p \text{ hielo}} = 0,5 \text{ cal/gK}$; $C_{p \text{ agua}} = 1 \text{ cal/gK}$; $L_f = 80 \text{ cal/g}$; $\rho_{\text{hielo}} = 0,92 \text{ g/cm}^3$; $\rho_{\text{agua}} = 1 \text{ g/cm}^3$)

Solución:

La energía interna se define a partir de la diferencia entre el calor cedido o absorbido por el sistema y el trabajo realizado por el mismo:

$$\Delta U = Q - W$$

Vamos en primer lugar a calcular el calor, absorbido en este caso, ya que el sistema aumenta su temperatura de -5°C a 20°C :

$$Q = m \cdot C_{p \text{ hielo}} \cdot \Delta T + m \cdot L_f + m \cdot C_{p \text{ agua}} \cdot \Delta T = 200 \cdot 0,5 \cdot 5 + 200 \cdot 80 + 200 \cdot 1 \cdot 20 = 20,5 \text{ Kcal}$$

pasamos este valor a Julios (S.I.): **$Q = 8,54 \cdot 10^4 \text{ J}$**

•En segundo lugar calcularemos el trabajo a partir de su definición:

$$W = \int P \cdot dV = P \int dV = P \cdot \Delta V \quad (\text{hemos sacado } P \text{ fuera de la integral porque es cte)}$$

y a partir de la relación $V = m/\rho$, sustituimos en la ecuación del trabajo:

$$W = P (V_f - V_i) = 2 \text{ atm} \cdot [(200\text{g}/1\text{gcm}^{-3}) - (200\text{g}/0,92\text{gcm}^{-3})]$$

que tendremos que pasar al S.I. :

$$W = 2 \cdot 1013 \cdot 10^5 \text{ Pa} (-17,39) \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 = -3,52 \text{ J}$$

valor despreciable frente al calor absorbido Q. Es por ello, que podemos expresar la energía interna como:

$$\Delta U = Q - W \approx Q = 8,54 \cdot 10^4 \text{ J}$$

2. La diferencia de potencial entre los bornes de dos condensadores montados en paralelo es de 800 V, y la energía electrostática almacenada es de $4 \cdot 10^{-2}$ J. Si esos dos mismos condensadores estuvieran montados en serie, la energía electrostática sería de $2 \cdot 10^{-3}$ J. Calcular:

- La capacidad de cada uno de los condensadores.
- La carga de cada condensador y la diferencia de potencial entre sus bornes tanto en el caso del montaje en paralelo como en el montaje en serie.

Solución:

a) Si montamos los condensadores en paralelo:

$$V_1 = V_2 = V = 800 \text{ V}$$

siendo la carga de cada uno de ellos:

$$Q_1 = C_1 V \quad Q_2 = C_2 V$$

y la energía electrostática almacenada es:

$$U = \frac{1}{2} C_1 V^2 + \frac{1}{2} C_2 V^2 = \frac{1}{2} (C_1 + C_2) V^2 = 4 \cdot 10^{-2} \text{ J}$$

de donde podemos sacar que:

$$C_1 + C_2 = 2U / V^2 = 2 \cdot 4 \cdot 10^{-2} / 800^2 = 1,25 \cdot 10^{-7} \text{ F} \quad (1)$$

• Sin embargo, cuando están montados en serie, tendremos:

$$V_1' = Q' / C_1 \quad ; \quad V_2' = Q' / C_2 \quad ; \quad V_1' + V_2' = V = Q' (1/C_1 + 1/C_2)$$

de donde podemos despejar Q':

$$Q' = (C_1 \cdot C_2 / C_1 + C_2) \cdot V$$

Y siendo la energía electrostática del montaje en serie:

$$U' = \frac{1}{2} Q' V_1' + \frac{1}{2} Q' V_2' = \frac{1}{2} Q' (V_1' + V_2') = \frac{1}{2} Q' V = \frac{1}{2} (C_1 \cdot C_2 / C_1 + C_2) \cdot V^2$$

de donde podemos sacar que:

$$C_1 \cdot C_2 = (C_1 + C_2) \cdot 2U' / V^2 = 1,25 \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 10^{-3} / 800^2 = 7,8125 \cdot 10^{-16} \text{ F} \quad (2)$$

• Tenemos, por tanto, un sistema de dos ecuaciones (1) y (2) con dos incógnitas (C_1 y C_2). Despejando C_1 de la ecuación (1) y sustituyendo en (2), tendremos:

$$(1,25 \cdot 10^{-7} - C_2) \cdot C_2 = 7,8125 \cdot 10^{-16} \quad \rightarrow \quad C_2^2 - 1,25 \cdot 10^{-7} \cdot C_2 + 7,8125 \cdot 10^{-16} = 0$$

se trata de una ecuación de segundo grado, que nos da dos soluciones:

$$C_2 = 23,68 \mu\text{F} \quad C_2 = 1,32 \mu\text{F}$$

Estas dos soluciones corresponden a C_1 y C_2 , en cualquier orden.

b) Si el montaje es en paralelo:

$$Q_1 = C_1 V = 23,68 \cdot 10^{-6} \cdot 800 = 1,89 \cdot 10^{-2} \text{ C}$$

$$Q_2 = C_2 V = 1,32 \cdot 10^{-6} \cdot 800 = 1,056 \cdot 10^{-3} \text{ C}$$

Si el montaje es en serie:

$$Q_1' = Q_2' = Q' = (C_1 \cdot C_2 / C_1 + C_2) \cdot V = (23,68 \cdot 10^{-6} \cdot 1,32 \cdot 10^{-6} / 23,68 \cdot 10^{-6} + 1,32 \cdot 10^{-6}) \cdot 800$$

$$Q_1' = Q_2' = Q' = 10^{-3} \text{ C}$$

$$V_1' = (C_2 / C_1 + C_2) \cdot V = (1,32 \cdot 10^{-6} / 23,68 \cdot 10^{-6} + 1,32 \cdot 10^{-6}) \cdot 800 = 42,24 \text{ V}$$

$$V_2' = V - V_1' = 800 - 42,24 = 757,76 \text{ V}$$

3. Sean los vectores de posición de dos cargas $q_1 = 3 \text{ C}$ y $q_2 = -2 \text{ C}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 2\mathbf{k} \text{ (m)} \\ \mathbf{r}_2 &= 4t\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + (3t-1)\mathbf{k} \text{ (m)} \end{aligned}$$

a) Calcular en el instante $t = 1 \text{ s}$ el campo magnético que cada carga crea sobre la otra, en la posición en la que se encuentre cada una de ellas. Calcular también la fuerza a la que está sometida cada carga en dicho instante.

Solución:

La primera carga q_1 no crea ningún campo magnético, ya que:

$$\mathbf{v}_1 = d\mathbf{r}_1 / dt = (0,0,0) \text{ m/s}$$

Tampoco sufre ninguna fuerza debido al campo magnético de la otra carga q_2 , ya que está en reposo. La única que sufre q_1 es de tipo electrostático:

$$\mathbf{F}_1 = k \cdot (q_1 q_2 / r_{12}^3) \cdot \mathbf{r}_{12}$$

donde

$$\mathbf{r}_1(1) = (3,5,-2) \quad \mathbf{r}_2(1) = (4,-2,2) \quad \rightarrow \quad \mathbf{r}_{12}(1) = (-1,7,-4)$$

por tanto:

$$\mathbf{F}_1 = -9 \cdot 10^9 \cdot (2 \cdot 3 \cdot 10^{12} / 536'18) \cdot (-1,7,-4) = 1,007 \cdot 10^{-4} (\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) \text{ N}$$

Esto es, se trata de una fuerza atractiva de q_1 hacia q_2 de valor:

$$|\mathbf{F}_1| = 8'18 \cdot 10^{-4} \text{ N}$$

• En cuanto a la segunda carga, ésta crea un campo magnético sobre la primera de la forma:

$$\mathbf{B} = \mu_0 q_2 / 4\pi r_{12}^3 \cdot (\mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{r}_{12})$$

donde

$$\mathbf{v}_2 = d\mathbf{r}_2 / dt = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{k} \quad \mathbf{r}_{12}(1) = -\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$$

$$\mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{r}_{12} = (4,0,3) \wedge (-1,7,-4) = -21\mathbf{i} + 13\mathbf{j} + 28\mathbf{k}$$

así pues, el campo magnético tendrá de valor:

$$\mathbf{B} = 10^7 \cdot (-2) \cdot 10^{-6} \cdot (-21,13,28) / 536,18 = 3,73 \cdot 10^{-16} \cdot (21,-13,-28) \text{ T}$$

cuyo módulo es

$$|\mathbf{B}| = 1'39 \cdot 10^{-14} \text{ T}$$

Además, la única fuerza que produciría q_1 sobre q_2 es de tipo electrostático, y tendría el mismo valor que la fuerza ejercida por q_2 sobre q_1 , hallada anteriormente:

$$|\mathbf{F}_2| = 8'18 \cdot 10^{-4} \text{ N}$$

Fuente: enunciados correspondientes a exámenes de diferentes años de la Universidad Politécnica de Valencia.