

EXAMEN de  
FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS PARA EL ESTUDIO DEL MEDIO AMBIENTE  
(1º CC. AMBIENTALES)

1. a) Relaciona los conceptos “antiimagen de una función” y “soluciones de un sistema de ecuaciones”.

b) Calcula:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x^2}\right)^{2x^2}$  y  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 3x^4}{2x^4 + 5x}$

2. a) Define rango y núcleo de una aplicación lineal y relaciónalos con la dimensión del espacio de partida.

b) Obtener la proyección del vector  $u = (1, 2, -1) \in \mathbb{R}^3$  sobre el espacio ortogonal al espacio vectorial  $V = \langle (1, 0, 3), (-1, 2, 2) \rangle$ .

3. a) Define diferencial y derivada direccional de una función.

b) Calcula la derivada de  $f(x, y, z) = (y^2 + \sin x, e^z + x^3y)$  en el punto  $p = (\pi, 1, 0)$  en la dirección  $v = (0, 1, 2)$ .



### Problema 1

a) Sea  $f : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^m$  una función.

La antiimagen de  $y \in \mathfrak{R}^m$  mediante  $f$  es el conjunto  $f^{-1}(y) = \{x \in \mathfrak{R}^n : f(x) = y\}$

Las soluciones de un sistema de ecuaciones  $f(x) = b$  con  $b \in \mathfrak{R}^m$  conocidos son los puntos  $x \in \mathfrak{R}^n$  que verifican el sistema. Entonces,

$$x_0 \in \mathfrak{R}^n \text{ es solución de } f(x) = b \Leftrightarrow x_0 \in f^{-1}(b)$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x^2}\right)^{2x^2} = (1^\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2/3}\right)^{\frac{x^2}{3} \cdot 6} = e^6$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 3x^4}{2x^4 + 5x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3}{x^4} - \frac{3x^4}{x^4}}{\frac{2x^4}{x^4} + \frac{5x}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} - 3}{2 + \frac{5}{x^3}} = -\frac{3}{2}$$



## Problema 2

a) Sea  $f: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^m$  una aplicación lineal.

Se llama núcleo de  $f$  al conjunto de vectores de  $\mathfrak{R}^n$  cuya imagen es el vector nulo. Esto es,

$$\ker f = f^{-1}(0) = \{x \in \mathfrak{R}^n : f(x) = 0\}$$

Se llama rango de  $f$  a la imagen del espacio vectorial  $\mathfrak{R}^n$ , es decir,

$$\text{Im } f = f(\mathfrak{R}^n) = \{y \in \mathfrak{R}^m : \exists x \in \mathfrak{R}^n, f(x) = y\}$$

Se cumple que la dimensión del espacio de partida es igual a la suma de las dimensiones del núcleo y el rango.

$$n = \dim \ker f + \dim \text{Im } f$$

b) Calculamos un vector ortogonal a la base de  $V = \langle (1,0,3), (-1,2,2) \rangle$ .

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -6\vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k} \Rightarrow V^\perp = \langle \underbrace{(-6, -5, 2)}_w \rangle$$

La proyección de  $u = (1,2,-1)$  sobre  $V^\perp$  es

$$\pi_{V^\perp}(u) = \left( u \cdot \frac{w}{|w|} \right) \frac{w}{|w|} = \left( (1,2,-1) \cdot \frac{1}{\sqrt{65}} (-6,-5,2) \right) \frac{1}{\sqrt{65}} (-6,-5,2) = -\frac{18}{65} (-6,-5,2)$$

### Problema 3

a) Se llama diferencial de la función  $f: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^m$  en el punto  $p \in \mathfrak{R}^n$  a la aplicación lineal cuya matriz asociada es

$$df_p = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(p) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(p) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(p) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(p) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(p) \end{pmatrix}$$

La derivada direccional de  $f$  en el punto  $p \in \mathfrak{R}^n$  en la dirección del vector  $v \in \mathfrak{R}^n$  es:

$$D_v f(p) = \frac{df(p+tv)}{dt}(0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(p + \Delta t \cdot v) - f(p)}{\Delta t}$$

b) La diferencial de  $f(x, y, z) = (y^2 + \sin x, e^z + x^3 y)$  en el punto  $p = (\pi, 1, 0)$  es:

$$df_{(\pi, 1, 0)} = \left( \begin{array}{ccc} \cos x & 2y & 0 \\ 3x^2 y & x^3 & e^z \end{array} \right) \Big|_{(\pi, 1, 0)} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3\pi^2 & \pi^3 & 1 \end{pmatrix}$$

Así, la derivada direccional de  $f$  en el punto  $p$  en la dirección  $v = (0, 1, 2)$  es:

$$D_{(0, 1, 2)} f(\pi, 1, 0) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3\pi^2 & \pi^3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \pi^3 - 2 \end{pmatrix}$$

Fuente:

enunciados correspondientes a exámenes de diferentes años de la Universidad de Valencia.