

## FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA ARQUITECTURA TÉCNICA

### Diplomatura en Arquitectura Técnica

1. Considera la matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

a) Diagonaliza la matriz A, en caso de que ésta sea diagonalizable. Comprueba el resultado obtenido.

b) Calcula  $A^n$ , para todo  $n \geq 1$ . Qué diferencia observas entre las potencias pares y las potencias impares de A?

2. Sea A una matriz 5x5 tal que su polinomio característico se factoriza como:

$$q_A(\lambda) = 7(\lambda + 1)(\lambda - 2)(\lambda + 3)(\lambda - 7)(\lambda - 1).$$

¿Cuáles son los valores propios de A? ¿Es A una matriz diagonalizable? Justifica la respuesta.

3. Considera el plano  $\pi$  y la recta r dados por las siguientes ecuaciones:

$$\pi : x + y + 2z = 1, \quad r : \begin{cases} x - y = 3 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

a) Calcula las ecuaciones paramétricas de la recta r' simétrica de r respecto de  $\pi$ .

b) Calcula la ecuación implícita del plano que contiene a las recta r y r'.

4. Clasifica el conjunto de soluciones de las siguientes ecuaciones:

a)  $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 = 0$

b)  $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 11 = 0$

c)  $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 = 0$

5. Clasifica y dibuja aproximadamente el conjunto de soluciones de la siguiente ecuación. En caso de tratarse de una cónica no degenerada, calcula las coordenadas de su centro respecto de las coordenadas x, y y las direcciones que determinan su ejes principales.

$$5x^2 - 6xy + 2\sqrt{2}x + 5y^2 + 2\sqrt{2}y - 6 = 0$$

## RESOLUCIÓN

$$1. a) A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculamos valores propios:

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 (-1-\lambda) = 0 \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = 1 & m_1 = 2 \\ \lambda_2 = -1 & m_2 = 1 \end{matrix}$$

Calculamos vectores propios:

$$\lambda_1 = 1 \quad (A - \lambda_1 I) \vec{v} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -2y = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$\Rightarrow \vec{v} = (x, 0, z) = x(1, 0, 0) + z(0, 0, 1) \Rightarrow S_1 = \langle (1, 0, 0), (0, 0, 1) \rangle \Rightarrow \dim S_1 = 2$$

$$\lambda_2 = -1 \quad (A - \lambda_2 I) \vec{v} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left. \begin{matrix} 2x - 2y = 0 \\ -2y + 2z = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow x = y = z$$

$$\Rightarrow \vec{v} = (x, x, x) = x(1, 1, 1) \Rightarrow S_2 = \langle (1, 1, 1) \rangle \Rightarrow \dim S_2 = 1$$

Como  $\dim S_1 = m_1 = 2$  y  $\dim S_2 = m_2 = 1 \Rightarrow A$  diagonalizable  $\Rightarrow A = PDP^{-1}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Recuerda que las columnas de P son los vectores propios y los elementos de la diagonal de D son los valores propios repetidos según su multiplicidad.

Comprobemos el resultado:

$$PD = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} = A$$

$$b) A^n = P D^n P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & (-1)^n - 1 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & (-1)^n - 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Si } n \text{ par} \Rightarrow A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$\text{Si } n \text{ impar} \Rightarrow A^n = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} = A$$

2. Los valores propios de A son  $\lambda / q_A(\lambda) = 7(\lambda + 1)(\lambda - 2)(\lambda + 3)(\lambda - 7)(\lambda - 1) = 0$   
 $\Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -3, \lambda_4 = 7$  y  $\lambda_5 = 1$  todos con multiplicidad 1  
 Como todos los valores propios son reales y distintos de multiplicidad 1  $\Rightarrow$   
 A diagonalizable

3. Sean  $\pi : x + y + 2z = 1$  y  $r : \begin{cases} x - y = 3 \\ y + z = 0 \end{cases}$

a) Calculamos las ecuaciones paramétricas de r usando la regla de Cramer

$$z = \lambda \Rightarrow \begin{cases} x - y = 3 \\ y + \lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 3 \\ y = -\lambda \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -\lambda & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} = 3 - \lambda \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} = -\lambda$$

$$r : \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Vemos las posiciones relativas de r y  $\pi$ :

$$r : \begin{cases} P(3,0,0) \\ \vec{v}(-1,-1,1) \end{cases}$$

(A,B,C) = (1,1,2) vector perpendicular al plano

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v} \cdot (A, B, C) = (-1, -1, 1) \cdot (1, 1, 2) = 0 \\ P(3, 0, 0) \in r, \text{ pero } P \notin \pi \end{array} \right\} \Rightarrow r \text{ y } \pi \text{ son paralelos}$$

Por tanto  $r'$  también lo será y tendrá el mismo vector director que  $r$

Calculemos el punto simétrico de  $P$  respecto de  $\pi$ :

$$\text{Hallamos } s \perp \pi \text{ que pasa por } P \Rightarrow s : \begin{cases} P(3, 0, 0) \\ (A, B, C) = (1, 1, 2) \end{cases}$$

$$s : \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

Hallamos punto de corte entre  $s$  y  $\pi$

$$\left. \begin{array}{l} x = 3 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 2\lambda \\ x + y + 2z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 3 + \lambda + \lambda + 2 \cdot 2\lambda = 1 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{3} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 3 - \frac{1}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \\ z = -\frac{2}{3} \end{array} \left. \right\} \Rightarrow M\left(\frac{8}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

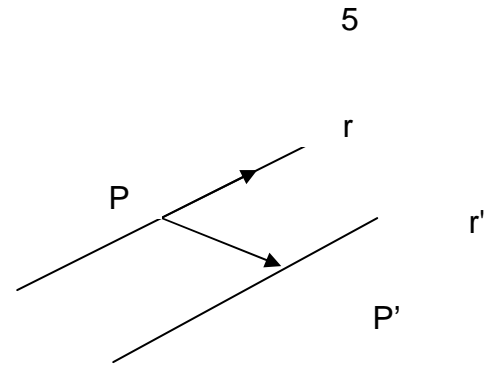
$M$  es el punto medio entre  $P$  y  $P'$

$$\frac{P + P'}{2} = M \Rightarrow \frac{(3, 0, 0) + (x, y, z)}{2} = \left(\frac{8}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) \Rightarrow P' = \left(\frac{7}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)$$

$$\text{Calculamos } r' : \begin{cases} P'\left(\frac{7}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right) \\ \vec{v}(-1, -1, 1) \end{cases} \Rightarrow r' : \begin{cases} x = \frac{7}{3} - \lambda \\ y = -\frac{2}{3} - \lambda \\ z = -\frac{4}{3} + \lambda \end{cases}$$

$$\text{b) Como } r \text{ y } r' \text{ son paralelas } \Rightarrow \pi' : \begin{cases} P(3, 0, 0) \\ \vec{v}(-1, -1, 1) \\ PP'\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right) \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} x-3 & -1 & -\frac{2}{3} \\ y & -1 & -\frac{2}{3} \\ z & 1 & -\frac{4}{3} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi': x - y - 3 = 0$$



4. a)  $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + y^2 + 6y + 10 = 0$

Buscamos igualdades notables:

$$\begin{aligned} (x-1)^2 &= x^2 - 2x + 1 \\ (y+3)^2 &= y^2 + 6y + 9 \end{aligned}$$

Hacemos equivalencia en la ecuación:

$$\underline{x^2 - 2x + 1} - 1 + \underline{y^2 + 6y + 9} - 9 + 10 = 0$$

Sustituimos por las igualdades notables:

$$(x-1)^2 - 1 + (y+3)^2 - 9 + 10 = 0$$

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 = 0$$

Es una cónica degenerada, la ecuación sólo es cierta para el punto (1,-3)

b)  $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 11 = 0$

Siguiendo los pasos del apartado a) tenemos:

$$(x-1)^2 - 1 + (y+3)^2 - 9 + 11 = 0$$

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 = -1$$

Es una cónica degenerada, la ecuación no se cumple para ningún punto del plano.

c)  $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 11 = 0$

Siguiendo los pasos del apartado a) tenemos:

$$(x-1)^2 - 1 + (y+3)^2 - 9 + 6 = 0$$

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 = 4$$

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 = 2^2$$

Es una cónica no degenerada, la ecuación de una circunferencia de centro (1,-3), radio 2

5. Sea  $5x^2 - 6xy + 2\sqrt{2}x + 5y^2 + 2\sqrt{2}y - 6 = 0$

Escribimos la ecuación matricial:

$$(x \ y) \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (2\sqrt{2} \ 2\sqrt{2}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 6 = 0$$

Como hay término xy (la matriz no es diagonal) haremos un giro:

Hallamos los valores propios de  $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 \\ -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda + 16 = 0 \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = 2 & m_1 = 1 \\ \lambda_2 = 8 & m_2 = 1 \end{matrix}$$

Calculamos vectores propios:

$$\lambda_1 = 2 \quad (A - \lambda_1 I) \vec{v} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 3x - 3y = 0 \Rightarrow x = y$$

$$\Rightarrow \vec{v} = (x, x) = x(1, 1) \Rightarrow S_1 = \langle (1, 1) \rangle \Rightarrow \|\vec{v}_1\| = \sqrt{2} \Rightarrow \vec{v}_1 = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\lambda_2 = 8 \quad (A - \lambda_2 I) \vec{v} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -3x - 3y = 0 \Rightarrow x = -y$$

$$\Rightarrow \vec{v} = (x, -x) = x(1, -1) \Rightarrow S_2 = \langle (1, -1) \rangle \Rightarrow \|\vec{v}_2\| = \sqrt{2} \Rightarrow \vec{v}_2 = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

Recordemos que la base de los vectores propios ha de ser ortonormal, por ello dividimos los vectores por su norma para que sean unitarios.

Como A es simétrica  $\Rightarrow$  A diagonalizable  $\Rightarrow A = PDP^T$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones del giro son:

$$\Rightarrow X = PX' \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Sustituimos en la ecuación de la cónica:

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + (2\sqrt{2} \quad 2\sqrt{2}) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - 6 = 0$$

Operando:

$$2x'^2 + 8y'^2 + 4x' - 6 = 0$$

$$x'^2 + 4y'^2 + 2x' - 3 = 0$$

Como hay término  $x'$  haremos una traslación:

$$\underline{x'^2 + 2x'} + 4y'^2 - 3 = 0$$

Completamos cuadrados:

$$(x' + 1)^2 = x'^2 + 2x' + 1$$

$$\underline{x'^2 + 2x' + 1} - 1 + 4y'^2 - 3 = 0$$

$$(x' + 1)^2 + 4y'^2 - 4 = 0$$

Las ecuaciones de la traslación son:

$$x'' = x' + 1$$

$$y'' = y'$$

Sustituimos en la ecuación de la cónica:

$$x''^2 + 4y''^2 - 4 = 0$$

Obtenemos la ecuación reducida operando:

$$\frac{x''^2}{4} - y''^2 - 1 = 0$$

$$\frac{x''^2}{2^2} - \frac{y''^2}{1^2} = 1$$

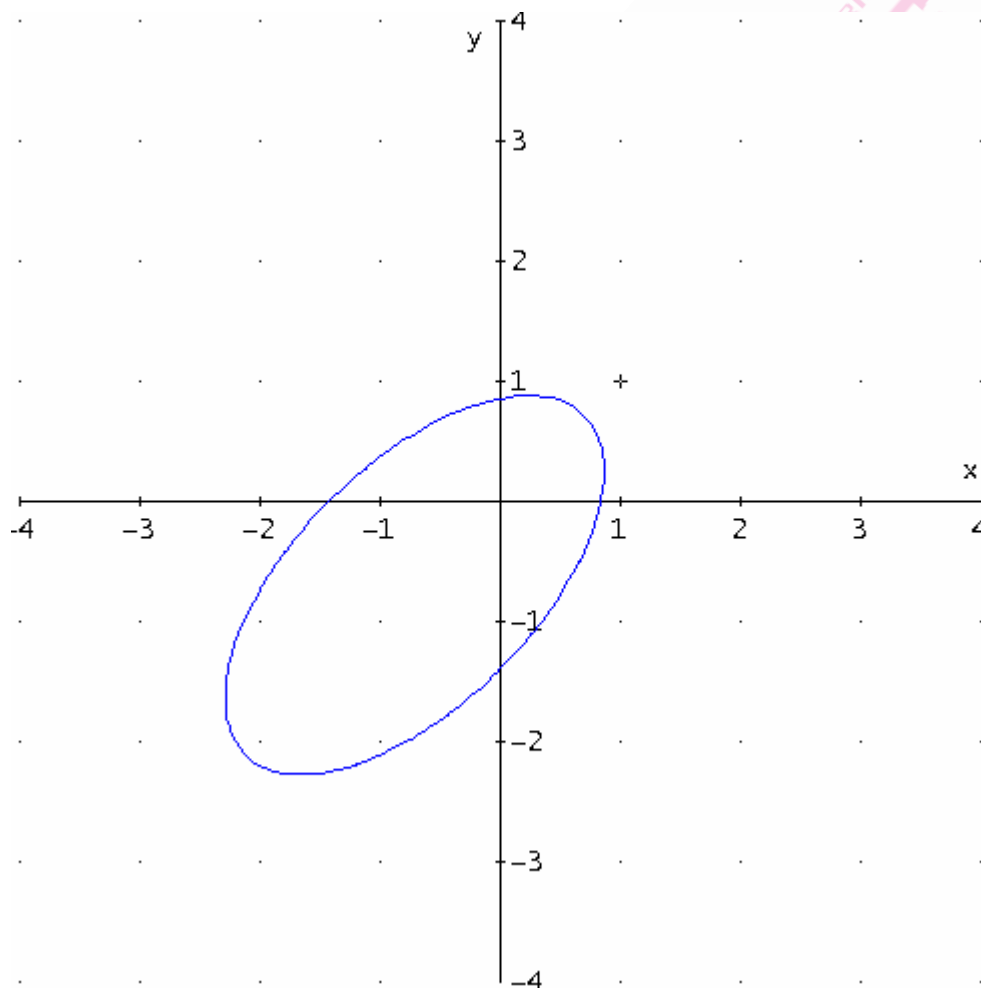
Es una elipse de centro  $(-1,0)$  y semiejes 2 y 1

Los ejes vienen determinados por las rectas que pasan por su centro y tienen como direcciones los vectores propios  $\vec{v}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  y  $\vec{v}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \quad -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

El centro  $(-1,0)$  es en el sistema de referencia  $\{O, \vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ , luego sus coordenadas en el sistema de referencia canónico sería:

$$(-1,0) = -1 \cdot \vec{v}_1 + 0 \cdot \vec{v}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \quad -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Dibujemos la cónica:



Fuente: enunciados correspondientes a exámenes de diferentes años de la Universidad Politécnica de Valencia