FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA ARQUITECTURA TÉCNICA

Diplomatura en Arquitectura Técnica

1. a) Dada la siguiente función: f(x,y)= x^2 +3 y^3 – 2xy ,calcula:

$$\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

b) Halla el plano tangente a la superficie dada por la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ en el punto (0,0,2).

2. a) Representa gráficamente el recinto D $\subset$ P encerrado por $\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 4 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$

b) Halla la integral $\iint_D \sqrt{4 - x^2 - y^2}\ dxdy$

3. Encuentra y clasifica los puntos críticos de f(x,y) = $y^3 - x^3 + y^2 - x^2$

4. Maximiza la función f(x,y) = $-5x^2 + y^2 + x - 7$ con la condición y = 2x + 1

5. Resuelve la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$y'' - 5y' + 6y = x^2 - 3x + 2$$

RESOLUCIÓN

1. a) $\frac{\partial f}{\partial x}$ = 2x – 2y

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2$$

$\frac{\partial f}{\partial y}$ = 9y^2 – 2x

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 18y$$

b) La ecuación de la superficie es z = f(x,y) = $\sqrt{4 - x^2 - y^2}$

La ecuación del plano tangente a la superfície z en el punto z_0 es:

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

Sabemos que (x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 2).

Necesitamos calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\ y\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{4 - x^2 - y^2}} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$$

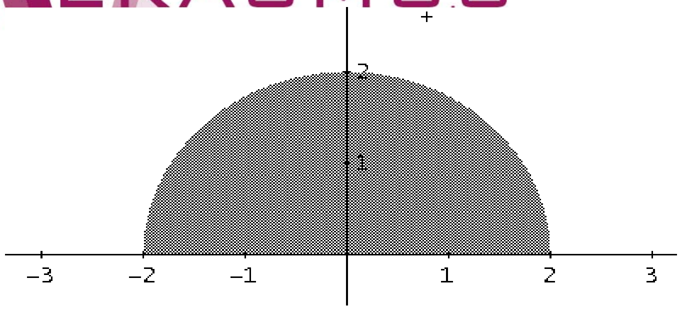
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{4 - x^2 - y^2}} \cdot (-2y) = \frac{-y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

Sustituyendo en la expresión anterior, la ecuación del plano es z – 2 = 0

2. a) $x^2 + y^2 = 4$ es una circunferencia centrada en el origen y de radio 2

y □ 0 es el semiplano del primer y segundo cuadrantes

Por tanto, el recinto encerrado es la semicircunferencia situada en dichos cuadrantes.



b) Hacemos cambio de variable a polares:

$$\begin{bmatrix} x=\rho\cos\theta & x^2+y^2=\rho^2 \\ y=\rho sen\theta & |J|=\rho \end{bmatrix} \to \iint_D \sqrt{4-x^2-y^2}\,dxdy = \iint_{D'} \sqrt{4-\rho^2}\,\rho d\rho d\theta =$$

$$donde \quad D'=\{(\rho,\theta)\in\Re^2 \,/\, 0\le\rho\le 2 \ , 0\le\theta\le\pi\}$$

$$=\int_0^2\int_0^\pi \rho\sqrt{4-\rho^2}\,d\theta\, d\rho = \int_0^2 \rho\sqrt{4-\rho^2}\ d\rho\,[\theta]_0^\pi = \pi\int_0^2 \rho\sqrt{4-\rho^2}\ d\rho = \frac{\pi}{-2}\int_0^2 -2\rho\sqrt{4-\rho^2}\ d\rho =$$

$$=-\frac{\pi}{2}\int_0^2 -2\rho(4-\rho^2)^{1/2}\ d\rho = -\frac{\pi}{2}\left[\frac{(4-\rho^2)^{3/2}}{3/2}\right]_0^2 = -\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2\cdot 4^{3/2}}{3} = \frac{8\pi}{3}$$

3. a) Puntos críticos de $f(x, y) = y^3 - x^3 + y^2 - x^2$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = -3x^2 - 2x = 0 \to x = 0 \ o \ x = -\dfrac{2}{3} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 + 2y = 0 \to y = 0 \ o \ y = -\dfrac{2}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow Puntos\ críticos\ (0,0),\left(0,-\frac{2}{3}\right),\left(-\frac{2}{3},0\right),\left(-\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$$

Vamos a clasificarlos:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-6x-2\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=0\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6y+2\end{array}\right\}\Rightarrow H_f=\begin{bmatrix}-6x-2 & 0\\ 0 & 6y+2\end{bmatrix}$$

$$H_f(0,0)=\begin{vmatrix}-2 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}=-4<0\rightarrow(0,0)\ \textit{punto de silla}$$

$$H_f\left(0,-\frac{2}{3}\right)=\begin{vmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{vmatrix}=4>0\ y\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(0,-\frac{2}{3}\right)=-2<0\rightarrow\left(0,-\frac{2}{3}\right)\textit{máximo relativo}$$

$$H_f\left(-\frac{2}{3},0\right)=\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}=4>0\ y\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(0,-\frac{2}{3}\right)=2>0\rightarrow\left(-\frac{2}{3},0\right)\textit{mínimo relativo}$$

$$H_f\left(-\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)=\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & -2\end{vmatrix}=-4<0\rightarrow\left(-\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)\textit{punto de silla}$$

4. Maximizar f(x,y)= $-5x^2 + y^2 + x - 7$ con la condición y= 2x + 1

Pero la condición debe ser g(x,y) = 0 → g(x,y) = 2x – y + 1

Utilizamos el método de los multiplicadores de Lagrange.

Sea la función de Lagrange L(x,y, λ) = $--5x^2 + y^2 + x - 7 + \lambda (2x - y + 1)$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial L}{\partial x}=-10x+1+2\lambda=0\Rightarrow\lambda=\dfrac{10x-1}{2}\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=2y-\lambda=0\Rightarrow\lambda=2y\end{array}\right\}\Rightarrow\dfrac{10x-1}{2}=2y\\ \dfrac{\partial L}{\partial\lambda}=2x-y+1=0\end{array}\right\}\Rightarrow x=\frac{5}{6}\ \ddot{y}=6\ \lambda=1$$

El único punto crítico es $\left(\frac{5}{6},6\right)$, luego es el máximo.

5. $y'' - 5y' + 6y = x^2 - 3x + 2$ edo lineal 2º orden coeficiente constantes no homogénea

Resolvemos la ecuación homogénea $y'' - 5y' + 6y = 0$

$x^2 - 5x + 6 = 0 \to x_1 = 2 \;\; x_2 = 3 \to y_h = c_1e^{2x} + c_2e^{3x}$

Hallamos una solución particular $y_p = ax^2 + bx + c$

$y_p' = 2ax + b$

$y_p'' = 2a$

$2a - 5(2ax + b) + 6(ax^2 + bx + c)= x^2 - 3x + 2$

$2a - 10ax - 5b + 6ax^2 + 6bx + 6c = x^2 - 3x + 2$

Igualando coeficientes:

$$\left.\begin{array}{l} 6a = 1 \\ -10a + 6b = -3 \\ 2a - 5b + 6c = 2 \end{array}\right\} \to a = \frac{1}{6} \; b = -\frac{2}{9} \; c = \frac{5}{54} \to y_p = \frac{x^2}{6} - \frac{2x}{9} + \frac{5}{54}$$

La solución es $y_h + y_p = c_1e^{2x} + c_2e^{3x} + \frac{x^2}{6} - \frac{2x}{9} + \frac{5}{54}$

Fuente: enunciados correspondientes a exámenes de diferentes años de la Universidad Politécnica de Valencia