

EXAMEN DE MATEMÁTICAS

DIPLOMATURA DE ÓPTICA

1.- Resuelve el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 3x - 4y + z = 4 \\ 2x + y - 5z = 8 \\ x + 2y + 3z = 14 \end{cases}$$

2.- Calcula x para que el rango de la matriz H sea 2:

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & x \\ 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

3.- Estudia la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ x^2 - 1, & x > 1 \end{cases}$$

4.- Calcúlese la derivada de la siguiente función:

$$y = \frac{5x - 3}{(4x)^2}$$

SOLUCIONES:

1.-

La matriz del sistema $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $|A| = 9+4+20-1+24+30 = 86$. Es distinto de cero. Entonces el rango de A es 3.

La matriz A ampliada es $\bar{A} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -5 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \end{pmatrix}$ por tanto como dentro de la matriz

ampliada está la matriz A con determinante no nulo y el rango de la ampliada no puede ser superior a 4 porque es 3x4, el rango de la ampliada es también 3. Por tanto es un sistema compatible determinado. Lo resolvemos por Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -4 & 1 \\ 8 & 1 & -5 \\ 14 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{86} = 5$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 8 & -5 \\ 1 & 14 & 3 \end{vmatrix}}{86} = 3$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 14 \end{vmatrix}}{86} = 1$$

Sol: (5,3,1)

2.- $\det(H) = -48 + 16x$ $-48 + 16x = 0 ; x = 3$

Si $x=3$; determinante de H es 0.

Por tanto el rango de H será menor o igual que 2. Pero como el determinante de la submatriz

$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ es distinto de 0, entonces rango de H es 2 si $x = 3$.

3.- f será continua si f es continua en 1 (punto de discontinuidad a analizar)

$$\Leftrightarrow f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

1) $f(1) = 1$

2) ¿ $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ con $x \rightarrow 1$?

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) = 1-1 = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 - 1 = 1 - 1 = 0.$$

Entonces $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ vale 0, pero es distinto de $f(1)$.

Por tanto f no es continua en 1, entonces f no es continua.

4.-

$$y = \frac{5x-3}{(4x)^2}$$

$$y' = \frac{5((4x)^2) - (5x-3)2(4x)4}{(4x)^4} = \frac{-80x^2 + 96x}{(4x)^4}$$

Fuente: enunciados correspondientes a exámenes de diferentes años de la Universidad de Valencia.