FUNDAMENTOS FÍSICOS
INGENIERO AERONÁUTICO

1. Sea una fuente puntual de iluminación cuyo campo de intensidades viene dado por la expresión $I = 1 - (x^2 + y^2)$ W/m^2 . Calcular:

a) Valor de I (0'5,0'5)
b) Lugar geométrico de los puntos I(r) = 0'2 W/m^2 y I(r) = 0'8 W/m^2
c) Máxima variación en P(0'5,0´5), y dirección en que tiene lugar
d) Derivadas en los ejes X e Y
e) Derivada en la dirección (4**i** – 5**j**)/π

Solución

a) I (0'5,0'5) = 1 – (0'5^2 + 0'5^2) = 0`5 W/m^2

b) 0'2 = 1 – ($x^2 + y^2$) $\rightarrow$ $x^2 + y^2$ = 1 – 0'2 = 0'8 $\rightarrow$ $x^2/_{0'8} + y^2/_{0'8} = 1$

Corresponde a una circunferencia de radio (0`8)$^{1/2}$ = 0'894

0,8 = 1 – ($x^2 + y^2$) $\rightarrow$ $x^2 + y^2$ = 1 – 0'8 = 0'2 $\rightarrow$ $x^2/_{0'2} + y^2/_{0'2} = 1$

Corresponde a una circunferencia de radio (0`2)$^{1/2}$ = 0'447

c) Máxima variación: $|\partial I|_{P(0'5,0'5)} = |-2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j}|_{P(0'5,0'5)} = |-2\cdot 0'5\mathbf{i} - 2\cdot 0'5\,\mathbf{j}|$ = $|-\mathbf{i} - \mathbf{j}| = \sqrt{(1^2 + 1^2)} = \sqrt{2}$

donde $\partial I/\partial x = \partial/\partial x\,[1 - (x^2 + y^2)] = -2x$

$\partial I/\partial y = \partial/\partial y\,[1 - (x^2 + y^2)] = -2y$

dirección en que tiene lugar:

$$(dI/d\mathbf{s})_{\mathbf{u}} = |\partial I| \cdot \mathbf{u} \quad \rightarrow \quad \mathbf{u} = |\partial I|^{-1} \cdot (dI/d\mathbf{s})_{\mathbf{u}}$$

$(dI/d\mathbf{s})_{\mathbf{u}} = \partial I/\partial x\, \mathbf{i} + \partial I/\partial y\, \mathbf{j} = -2x\, \mathbf{i} - 2y\, \mathbf{j}$

$|\partial I|_{P(0'5,0'5)} = \sqrt{2}$

$$\mathbf{u} = (\sqrt{2})^{-1} \cdot (-2x\, \mathbf{i} - 2y\, \mathbf{j}) = -1{,}414\, \mathbf{i} - 1{,}414\, \mathbf{j}$$

d) Derivada en el eje X: $y = 0 \quad \longrightarrow \quad I = 1 - x^2$

$$dI/d\mathbf{s} = \partial I/\partial x + \partial I/\partial y = -2x \quad \longrightarrow \quad (dI/d\mathbf{s})_{P(0'5,0'5)} = -2 \cdot 0'5 = -1$$

Derivada en el eje Y: $x = 0 \quad \longrightarrow \quad I = 1 - y^2$

$$dI/d\mathbf{s} = \partial I/\partial x + \partial I/\partial y = -2y \quad \longrightarrow \quad (dI/d\mathbf{s})_{P(0'5,0'5)} = -2 \cdot 0'5 = -1$$

d) $(dI/d\mathbf{s})_{\mathbf{u}} = |\partial I| \cdot \mathbf{u} = (-2x\,\mathbf{i} - 2y\,\mathbf{j})_{P(0'5,0'5)} \cdot (4\mathbf{i} - 5\mathbf{j})/\pi = -8 \cdot 0'5/\pi + 10 \cdot 0'5/\pi$

$= -4/\pi + 5/\pi = 1/\pi$

2. Dado un oscilador armónico no amortiguado de masa m y frecuencia ω_o inicialmente en reposo, recibe un impulso en el instante t = 0, por lo que parte de $x_o = 0$ con una velocidad v_o y oscila libremente hasta un tiempo $t = 3\pi/2\omega_o$. A partir de ese momento se le aplica una fuerza $F = B\cos(\omega t + \theta)$

a) Hallar la posición de la masa en función del tiempo.

b) Particularizar el resultado anterior para $m = 0{,}5$ Kg , $\omega_o = 10$ rad/s , $v_o = 2$ m/s y $F = 10\cos(4t + \pi)$ N

Solución:

a) En el intervalo de tiempo $t = [\,0,\ 3\pi/2\omega_o]$ el sistema se comporta como un o.a.s. cuya ecuación de movimiento viene dada por:

$$d^2x/dt^2 + \omega_o^2 x = 0$$

y la solución de esta ecuación es $x(t) = A\ \mathrm{sen}\ (\omega_o t + \varnothing)$

Con las condiciones iniciales tenemos que:

$x(0) = 0 = A\ \mathrm{sen}\ \varnothing$
$v(t) = A\,\omega_o \cos(\omega_o t + \varnothing)$ $\longrightarrow$ $A = v_o / \omega_o$
$v(0) = A\,\omega_o = v_o$

$x(t) = v_o/\omega_o\ \mathrm{sen}\ (\omega_o t + \varnothing)$ *es la solución para nuestro caso particular.*

En el intervalo de tiempo $t = [3\pi/2\omega_o\,,\ \infty]$ *el sistema se comporta como un o.a.f. cuya ecuación de movimiento viene dada por:*

$$d^2x/dt^2 + \omega_o^2 x = B/m \cos(\omega t + \theta)$$

donde la solución a esta ecuación es la suma de dos soluciones, una la homogénea y otra la particular: $x = x_h + x_p$

La solución homogénea sale de la ecuación homogénea $\longrightarrow$ $d^2x_h/dt^2 + \omega_o^2 x_h = 0$

de solución $\longrightarrow$ $x_h(t) = A'\ \mathrm{sen}\ (\omega_o t + \varnothing')$

La solución particular sale de la ecuación $\rightarrow$ $d^2x_p/dt^2 + \omega_o^2\, x_p = B/m\, e^{j(\omega t + \theta)}$
y es de la forma $\longrightarrow$ $x_p = C\, e^{j(\omega t + \theta)}$ *que sustituyendo en la ecuación:*

$$-\omega^2 C\, e^{j(\omega t + \theta)} + \omega_o^2 C\, e^{j(\omega t + \theta)} = B/m\, e^{j(\omega t + \theta)}$$

de donde sacamos la constante C :

$$C = B/m\,(\omega_o^2 - \omega^2)^{-1} \qquad \longrightarrow \qquad x_p = B/m\,(\omega_o^2 - \omega^2)^{-1} \cos(\omega t + \theta)$$

La solución a nuestra ecuación será entonces:

$$x(t) = A' \,\mathrm{sen}\,(\omega_o t + \varnothing') + B/m\,(\omega_o^2 - \omega^2)^{-1} \cos(\omega t + \theta)$$

en esta solución tenemos dos incógnitas (A' y ø'), lo demás lo conocemos todo. Para hallar estas incógnitas, utilizamos las condiciones iniciales, que será t=0 para la oscilación forzada cuando para la oscilación libre es $t = 3\pi/2\omega_o$ *:*

$$x\,(t = 3\pi/2\omega_o) = v_o/\omega_o \,\mathrm{sen}\,(\omega_o\, 3\pi/2\omega_o) = v_o/\omega_o \,\mathrm{sen}\,(3\pi/2) = -\,v_o/\omega_o \qquad \text{(o.a.s.)}$$

$$x\,(t=0) = A' \,\mathrm{sen}\,\varnothing' + B/m\,(\omega_o^2 - \omega^2)^{-1} \cos\theta \qquad \text{(o.a.f.)}$$

por tanto:

$$A' \,\mathrm{sen}\,\varnothing' + B/m\,(\omega_o^2 - \omega^2)^{-1} \cos\theta = -\,v_o/\omega_o \qquad (1)$$

Y la segunda condición inicial es que la primera derivada de la posición es cero para el o.a.s. ($t = 3\pi/2\omega_o$) *y para el o.a.f.* (t=0):

$$dx/dt\,(t = 3\pi/2\omega_o) = 0 \qquad dx/dt\,(t=0) = A'\,\omega_o/\omega \cos\varnothing' - B/m\,(\omega_o^2 - \omega^2)^{-1} \,\mathrm{sen}\,\theta$$

por tanto:

$$A'\,\omega_o/\omega \cos\varnothing' - B/m\,(\omega_o^2 - \omega^2)^{-1} \,\mathrm{sen}\,\theta = 0 \qquad (2)$$

de las ecuaciones (1) y (2) ya podemos determinar las incógnitas:

$$A' = [(A'\cos\varnothing')^2 + (A'\,\mathrm{sen}\,\varnothing')^2]^{-1} = [(\omega/\omega_o\, K \,\mathrm{sen}\,\theta)^2 + (v_o/\omega_o + K\cos\theta)^2]^{-1}$$

$$\mathrm{tg}\,\varnothing' = A'\,\mathrm{sen}\,\varnothing' / A'\cos\varnothing' \quad \longrightarrow \quad \varnothing' = \mathrm{arctg}\,[\,-(v_o/\omega_o + K\cos\theta) / (\omega/\omega_o\, K \,\mathrm{sen}\,\theta)\,]$$

donde: $K = B/m\,(\omega_o^2 - \omega^2)^{-1}$

b) m = 0,5 kg , ω_o = 10 rad/s , v_o = 2 m/s , F = 10cos(4t + π) N

entonces tenemos que : $K = 10/0,5\ (10^2 - 4^2)^{-1} = 0,1724$ m

$A' = [(4/10\ \ 0,1724\ sen\ \pi)^2 + (2/10 + 0,1724\ \cos\pi)^2]^{-1} = 2,76\ 10^{-2}$ m

$ø' = \text{arctg}\ [\ -(\ 2/10 + 0,1724\ \cos\pi) / (4/10\ \ 0,1724\ sen\ \pi)\ ] = \pi/2$ rad

La ecuación de posición de nuestro movimiento es:

$$x(t) = 2,76\ 10^{-2}\ sen\ (10t + \pi/2) + 0,1724\ \cos(4t + \pi)\ \ m$$

Fuente: Enunciados correspondientes a exámenes de diferentes años de la Universidad Politécnica de Valencia.