

## EXAMEN CÁLCULO INGENIERÍA DE CAMINOS

### BLOQUE 1

1.- Calcula:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left[ \frac{2}{1} + \frac{3^2}{2} + \frac{4^3}{3^2} + \dots + \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}} \right]$$

2.- Calcula las raíces de la ecuación  $z^3 - 1 = 0$

3.- Calcula los puntos interiores y los de acumulación del conjunto de la recta real:

$$A = ]0,1] \cup \{3\}$$

### BLOQUE 2

1.- Estudia la continuidad en  $x = 1$  de la función:

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot e^{\frac{x}{x-1}} & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

2.- Calcula:

a)  $\int 2x(\arctg x^2) dx$

b)  $\int \frac{x dx}{(x-2)(x^2+4)}$

c)  $\int \frac{\ln(x)}{x} dx$

3.- Dada la función

$$f(x) = x \cdot e^x$$

calcula: a) Máximos y mínimos. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) Puntos de inflexión. Concavidad.

**SOLUCIONES**

**BLOQUE 1**

$$1.- \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left[ \frac{2}{1} + \frac{3^2}{2} + \frac{4^3}{3^2} + \dots + \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left[ \frac{2}{1} + \frac{3^2}{2} + \frac{4^3}{3^2} + \dots + \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}} \right]}{n^2} =$$

aplicamos el criterio de Stolz =

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left[ \frac{2}{1} + \frac{3^2}{2} + \frac{4^3}{3^2} + \dots + \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}} \right] - \left[ \frac{2}{1} + \frac{3^2}{2} + \frac{4^3}{3^2} + \dots + \frac{(n)^{n-1}}{(n-1)^{n-2}} \right]}{n^2 - (n-1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}}{2n-1} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \left( \frac{n+1}{n} \right)^{n-1}}{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)}{2n-1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{n} \right)^{n-1} = \frac{1}{2} e^\lambda = L$$

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} (n-1) \left( \frac{n+1}{n} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (n-1) \left( \frac{n+1-n}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n-1}{n} \right) = 1$$

$$L = \frac{1}{2} e$$

**2.- Calcula las raíces de la ecuación  $z^3 - 1 = 0$**

$$z^3 - 1 = 0 \Rightarrow z^3 = 1 \Rightarrow z = \sqrt[3]{1}$$

Expresamos el n° complejo 1 en forma polar:

$$|1| = 1 ; \arg(1) = 0 \Rightarrow 1 = 1_0$$

$$z_0 = |1|^{\frac{1}{3}} \frac{0}{3} = (\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) = 1$$

$$z_1 = |1|^{\frac{1}{3}} \frac{0+2\pi}{3} = \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$z_2 = |1|^{\frac{1}{3}} \frac{0+4\pi}{3} = \left( \cos \frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

**3.- Calcula los puntos interiores y los de acumulación del conjunto de la recta real:**

$$A = ]0,1] \cup \{3\}$$

Por definición un punto  $a$  es interior si cualquier entorno suyo  $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$  está totalmente contenido en el conjunto  $A$ .

El 0, el 1 y el 3 no son interiores ya que, por ejemplo  $]0 - \varepsilon, 0 + \varepsilon[ \not\subset A$ , luego serán interiores el resto de puntos:  $]0,1[$ .

Un punto  $a$  es de acumulación si al intersectar un entorno suyo con el conjunto  $A$  tiene puntos en común sin contar al propio  $a$ , es decir:

$$]a - \varepsilon, a + \varepsilon[ - \{a\} \cap A \neq \emptyset$$

El 3 no es de acumulación ya que  $(]3 - \varepsilon, 3 + \varepsilon[ - \{3\}) \cap A = \emptyset$

El resto de puntos son de acumulación, incluso el 0:  $[0,1]$ .

## **BLOQUE 2**

**1.- Estudia la continuidad en  $x = 1$  de la función:**

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot e^{\frac{x}{x-1}} & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

a)  $\exists f(1) = 0$

b) Estudiamos la existencia de límite, para ello calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x \cdot e^{\frac{x}{x-1}} = 1 \cdot e^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x \cdot e^{\frac{x}{x-1}} = 1 \cdot e^{+\infty} = +\infty$$

Como no existe un límite lateral, el límite de  $f(x)$  en  $x = 1$  no existe, luego la función no puede ser continua.

**2.- Calcula:**

a)  $\int 2x(\arctg x^2) dx$  = Por partes =  $\left| \begin{array}{l} u = \arctg x^2 \quad du = \frac{2x dx}{1+x^4} \\ dv = 2x dx \quad v = 2 \int x dx = x^2 \end{array} \right| =$

$$x^2(\arctg x^2) - \int \frac{2x^3}{1+x^4} dx = x^2(\arctg x^2) - \frac{1}{2} \int \frac{4x^3}{1+x^4} dx = x^2(\arctg x^2) - \ln(\sqrt{1+x^4}) + C$$

b)  $\int \frac{x dx}{(x-2)(x^2+4)}$  = Racional

El denominador ya está factorizado, las soluciones son  $x = 2$  real simple y  $x^2 + 4$  con soluciones complejas. Descomponemos como suma de fracciones del siguiente modo:

$$\frac{x}{(x-2)(x^2+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Mx+N}{x^2+4} = \frac{A(x^2+4) + (Mx+N)(x-2)}{(x-2)(x^2+4)}$$

De donde igualando los numeradores  $x = A(x^2+4) + (Mx+N)(x-2)$

Si  $x = 2$   $2 = 8.A \Rightarrow A = \frac{1}{4}$

Si  $x = 0$   $0 = 4.A - 2.N \Rightarrow N = 2.A \Rightarrow N = \frac{1}{2}$

Si  $x = 1$   $1 = 5.A - M - N \Rightarrow M = 5 \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 1 \Rightarrow M = -\frac{1}{4}$

Sustituyendo en la integral la descomposición, tenemos:

$$\int \frac{x dx}{(x-2)(x^2+4)} = \int \frac{\frac{1}{4} dx}{x-2} + \int \frac{(-\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}) dx}{x^2+4} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{(-\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}) dx}{x^2+4} =$$

Resolvemos por separado ambas integrales

1)  $\frac{1}{4} \int \frac{dx}{x-2} = \frac{1}{4} \ln(x-2)$

2)  $\int \frac{(-\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}) dx}{x^2+4} = -\frac{1}{4} \int \frac{x dx}{x^2+4} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+4} = -\frac{1}{8} \int \frac{2x dx}{x^2+4} + \frac{1}{2} \int \frac{1 dx}{x^2 + \frac{4}{4}} =$

$$= -\frac{1}{8} \int \frac{2x dx}{x^2 + 4} + \frac{1}{8} \int \frac{dx}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1} = -\frac{1}{8} \ln(x^2 + 4) + \frac{2}{8} \int \frac{\frac{1}{2} dx}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1} = -\frac{1}{8} \ln(x^2 + 4) + \frac{1}{4} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)$$

Sumando ambas integrales tenemos el resultado:

$$= \frac{1}{4} \ln(x-2) - \frac{1}{8} \ln(x^2 + 4) + \frac{1}{4} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

$$\text{c) } \int \frac{\ln(x)}{x} dx = \text{Inmediata} = \frac{\ln^2(x)}{2} + C$$

### 3.- Dada la función

$$f(x) = x \cdot e^x$$

calcula:

#### a) Máximos y mínimos. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Calculamos la derivada y la igualamos a cero:

$$f'(x) = e^x + x e^x = e^x(1+x) \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow e^x(1+x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} e^x = 0 & \text{absurdo} \\ x = -1 \end{cases}$$

Para clasificar los puntos calculamos la segunda derivada, y sustituimos en ella dichos puntos.

$$f''(x) = e^x(1+x) + e^x = e^x(2+x) \Rightarrow f''(-1) = e^{-1}(2-1) = \frac{1}{e} > 0$$

La función tiene un mínimo en  $x = -1$ .

Para  $-\infty < x < -1$ :  $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$  decreciente

Para  $-1 < x < +\infty$ :  $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$  creciente

#### b) Puntos de inflexión. Concavidad.

Para calcular los puntos de inflexión igualamos la segunda derivada a cero:

$$f''(x) = 0 \Rightarrow e^x(2+x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} e^x = 0 & \text{absurdo} \\ x = -2 \end{cases}$$

Calculamos la tercera derivada y sustituimos el punto obtenido:

$$f'''(x) = e^x(2+x) + e^x = e^x(3+x) \Rightarrow f'''(-2) = e^{-2}(3-2) = \frac{1}{e^2} > 0$$

Como la tercera derivada no se anula en  $x = -2$  hay un punto de inflexión.

Para  $-\infty < x < -2$ :  $f''(x) < 0 \Rightarrow f(x)$  cóncava

Para  $-2 < x < +\infty$ :  $f''(x) > 0 \Rightarrow f(x)$  convexa.

Fuente: Enunciados correspondientes a exámenes de diferentes años de la Universidad Politécnica de Valencia.