

MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN BIOTECNOLOGÍA

Ejercicio 1 Dada la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix}$$

- (a) Estudia en función del parámetro a si la matriz es diagonalizable.
- (b) Para $a=1$ diagonaliza ortogonalmente la matriz A , dando matrices P ortogonal y D diagonal que verifiquen $D = PAP^t$.

Ejercicio 2 Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$f(x,y,z) = (x+y+z, -y+2z, x+3z)$$

y sea el subespacio vectorial de \mathbb{R}^3

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + 2z = 0, x + 2y - 5z = 0\}$$

- (a) Calcular el núcleo y la imagen de la aplicación f . ¿Es inyectiva? ¿y exhaustiva?
- (b) Calcula una base de U .
- (c) Calcula $\text{Im } f \cap U$ y $U + \ker f$.

Ejercicio 3 Ajusta los datos de la siguiente tabla a una recta de regresión

x	0	1	2	3	4
y	2	4	9	10	10

Ejercicio 4 Sea

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x + 8}}$$

- (a) Calcula el área limitada por la curva $y=f(x)$ y el eje de abscisas desde $x=0$ a $x=1$.
- (b) Calcula el volumen engendrado al girar $f(x)$ alrededor de OX desde $x = -2$ a $x=0$.

Ejercicio 5 Calcula la integral

$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

Siendo D la región limitada por $x^2 + y^2 = 4$ y $x^2 + y^2 = 9$ en el primer cuadrante.

Ejercicio 6 Dada la función

$$f(x,y) = \arctan(x\sqrt{1+y^2}) + e^{\text{sen}x} + \ln\left(\frac{x+y}{y-x}\right)$$

calcula la derivada direccional $D_u f(0,1)$ siendo $u = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

RESOLUCIÓN

Problema 1

(a) Calculamos el polinomio característico de la matriz A

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ a & 0 & a-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(a-\lambda) - a(2-\lambda) = (2-\lambda)[(1-\lambda)(a-\lambda) - a] =$$

$$= (2-\lambda)[\lambda^2 - (a+1)\lambda] = \lambda(2-\lambda)(\lambda - (a+1))$$

Así los valores propios de A son $\begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = 2 \\ \lambda = a+1 \end{cases}$

Caso I: Si $a \neq -1$ y $a \neq 1$.

En este caso todos los valores propios son simples, por lo tanto la matriz si es diagonalizable.

Caso II: Si $a=-1$.

En este caso los valores propios son $\begin{cases} \lambda = 0 \text{ doble} \\ \lambda = 2 \end{cases}$

A será diagonalizable si la dimensión del subespacio de vectores propios asociado al valor propio $\lambda = 0$ tiene dimensión dos.

$$\dim(E(0)) = 3 - \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1$$

Por lo tanto si $a=-1$ la matriz no es diagonalizable.

Caso III: Si $a=1$.

En este caso los valores propios son $\begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = 2 \text{ doble} \end{cases}$

A será diagonalizable si la dimensión del subespacio de vectores propios asociado al valor propio $\lambda = 2$ tiene dimensión dos.

$$\dim(E(2)) = 3 - \text{rango} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2$$

Por lo tanto si $a=1$ la matriz si es diagonalizable.

En resumen, hemos obtenido que la matriz A es diagonalizable siempre que $a \neq -1$.

(b) Si $a=1$ como la matriz es simétrica es ortogonalmente diagonalizable.

Tenemos que los valores propios de A son $\begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = 1 \text{ doble} \end{cases}$

Calculamos los vectores propios asociados al valor propio $\lambda = 0$, para ello tenemos que resolver el sistema de ecuaciones lineales homogéneo con matriz de coeficientes $(A-0I)=A$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Así tenemos $\begin{cases} x = -\alpha \\ y = 0 \\ z = \alpha \end{cases}$

por lo tanto los vectores propios son de la forma $(x, y, z) = \alpha(-1, 0, 1)$.

Una base de este subespacio es $\{(-1, 0, 1)\}$, como $\|(-1, 0, 1)\| = \sqrt{2}$ una base

ortonormal es $\left\{ \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$.

Calculamos los vectores propios asociados al valor propio $\lambda = 2$, para ello tenemos que resolver el sistema de ecuaciones lineales homogéneo con matriz de coeficientes $(A-2I)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3+F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Así tenemos $\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = \alpha \end{cases}$

por lo tanto los vectores propios son de la forma $(x, y, z) = \alpha(1, 0, 1) + \beta(0, 1, 0)$.

Una base del subespacio es $\{(1, 0, 1), (0, 1, 0)\}$, como estos dos vectores ya son ortogonales solo necesitamos dividir cada uno de ellos por su norma para obtener una base ortonormal.

Calculando $\|(1, 0, 1)\| = \sqrt{2}$ y $\|(0, 1, 0)\| = 1$, tenemos como base ortonormal de los

vectores propios asociados a $\lambda = 2$ $\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), (0, 1, 0) \right\}$.

Así si $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ se cumple $P^t A P = D$



Ejercicio 2

(a) La matriz asociada a la aplicación f en las bases canónicas es

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(La obtenemos colocando las imágenes de los vectores de la base canónica por columnas)

Calculamos el núcleo de la aplicación:

$$\ker f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = (0, 0, 0)\}$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones usando Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Como $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 2 < n^\circ$ de incógnitas tenemos un sistema compatible indeterminado.

Así la solución es
$$\begin{cases} x = -3\alpha \\ y = 2\alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

Podemos escribir $(x, y, z) = (-3\alpha, 2\alpha, \alpha) = \alpha(-3, 2, 1)$ y por lo tanto

$$\ker f = \{\alpha(-3, 2, 1) : \alpha \in \mathbb{R}\} = \text{LIN}\{(-3, 2, 1)\}$$

Luego una base del $\ker f$ es $\{(-3, 2, 1)\}$ y $\dim(\ker f) = 1$.

Observamos que f no es inyectiva (recordar que una aplicación lineal es inyectiva sii $\dim(\ker f) = 0$).

Calculamos la imagen de la aplicación:

$$\begin{aligned} \text{Im } f &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \exists (x', y', z') \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } f(x', y', z') = (x, y, z)\} \\ \text{Im } f &= \text{LIN}\{(1, 0, 1), (1, -1, 0), (1, 2, 3)\} \end{aligned}$$

Por los cálculos realizados antes vemos que el tercer vector es combinación lineal de los dos primeros.

Por lo tanto una base de $\text{Im } f$ es $\{(1, 0, 1), (1, -1, 0)\}$ y $\dim(\text{Im } f) = 2$.

Observamos que la aplicación no es exhaustiva (recordar que una aplicación lineal es exhaustiva sii la dimensión de la imagen coincide con la dimensión del espacio de llegada).

(b) Como $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + 2z = 0, x + 2y - 5z = 0\}$ para calcular un sistema generador de U resolvemos el sistema de ecuaciones dado por sus ecuaciones implícitas:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -5 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 0 \end{array} \right)$$

$$\text{Así } \begin{cases} x = -9\alpha \\ y = 7\alpha \\ z = \alpha \end{cases}, \text{ por lo tanto si } (x, y, z) \in U \rightarrow (x, y, z) = \alpha(-9, 7, 1)$$

Obtenemos como base de U $\{(-9, 7, 1)\}$, $\dim(U) = 1$

(c)

Para calcular $\text{Im } f \cap U$ necesitamos las ecuaciones implícitas de ambos subespacios.

Como una base de $\text{Im } f$ es $\{(1, 0, 1), (1, -1, 0)\}$, todo elemento de $\text{Im } f$ se puede escribir de la forma $(x, y, z) = \alpha(1, 0, 1) + \beta(1, -1, 0)$, resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & -1 & y \\ 1 & 0 & z \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 - F_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & -1 & y \\ 0 & -1 & z - x \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 - F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & -1 & y \\ 0 & 0 & z - x - y \end{array} \right)$$

Para que el sistema sea compatible debe cumplirse $z - x - y = 0$, así

$$\text{Im } f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z - x - y = 0\}$$

Podemos escribir:

$$\text{Im } f \cap U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z - x - y = 0, x + y + 2z = 0, x + 2y - 5z = 0\}$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -5 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_2 + F_1 \\ F_3 + F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

Sistema compatible determinado y homogéneo, la solución única es la trivial. Por lo tanto $\text{Im } f \cap U = \{(0, 0, 0)\}$

Por otra parte $U + \ker f = \text{LIN}\{(-9, 7, 1), (-3, 2, 1)\}$ y como estos vectores son linealmente independientes una base de la suma es $\{(-9, 7, 1), (-3, 2, 1)\}$

Ejercicio 3

Buscamos la recta de regresión $y=a+bx$. Si evaluamos esta expresión para los datos de la tabla obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 9 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Este sistema es incompatible, buscamos la solución por mínimos cuadrados, para ello multiplicamos ambos lados de la igualdad por la traspuesta de la matriz de coeficientes, obtenemos:

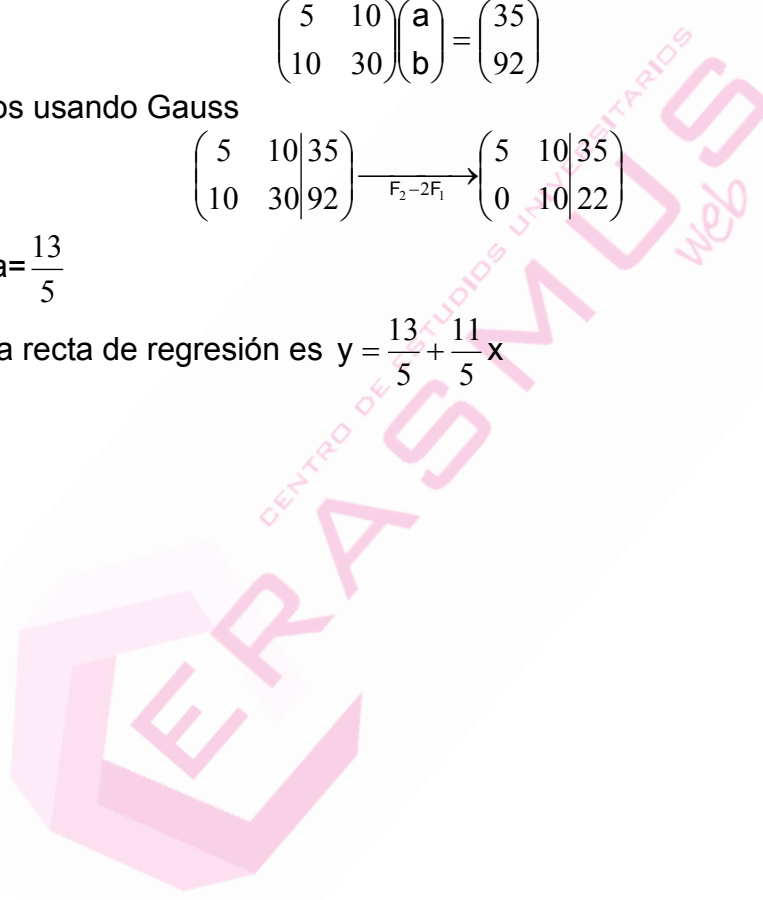
$$\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ 92 \end{pmatrix}$$

Lo resolvemos usando Gauss

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 10 & 35 \\ 10 & 30 & 92 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2-2F_1} \left(\begin{array}{cc|c} 5 & 10 & 35 \\ 0 & 10 & 22 \end{array} \right)$$

Así, $b = \frac{11}{5}$ y $a = \frac{13}{5}$

Por lo tanto la recta de regresión es $y = \frac{13}{5} + \frac{11}{5}x$



Ejercicio 4

(a) El área buscada viene dada por $\int_0^1 f(x)dx$, pues $f(x)>0$.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x + 8}} dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(x+2)^2 + 4}} dx = \int_0^1 \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{(x+2)^2}{4} + 1}} dx = \int_0^1 \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\left(\frac{x+2}{2}\right)^2 + 1}} dx =$$

$$= \left[\operatorname{argsenh}\left(\frac{x+2}{2}\right) \right]_0^1 = \operatorname{argsenh}\left(\frac{3}{2}\right) - \operatorname{argsenh}(1)$$

El área buscada es $\left(\operatorname{argsenh}\left(\frac{3}{2}\right) - \operatorname{argsenh}(1) \right)$.

(b) El volumen buscado viene dado por $\pi \int_{-2}^0 (f(x))^2 dx$.

$$\pi \int_{-2}^0 \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x + 8}} \right)^2 dx = \pi \int_{-2}^0 \frac{1}{x^2 + 4x + 8} dx = \pi \int_{-2}^0 \frac{1}{(x+2)^2 + 4} dx = \pi \int_{-2}^0 \frac{\frac{1}{4}}{\frac{(x+2)^2}{4} + 1} dx =$$

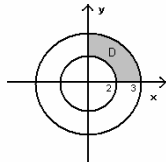
$$= \pi \int_{-2}^0 \frac{\frac{1}{4}}{\left(\frac{x+2}{2}\right)^2 + 1} dx = \pi \left[\frac{1}{2} \operatorname{artg}\left(\frac{x+2}{2}\right) \right]_{-2}^0 = \frac{\pi}{2} (\operatorname{arctg}(1) - \operatorname{arctg}(0)) = \frac{\pi^2}{8}$$

El volumen buscado es $\frac{\pi^2}{8}$.



Ejercicio 5

Nuestro recinto está limitado por dos circunferencias de centro el origen, una de radio 2 y otra de radio 3, en el primer cuadrante:



Para calcular la integral realizamos un cambio a coordenadas polares

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \end{cases}$$

Donde $\begin{cases} \rho \in [2,3] \\ \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$ Jacobiano = ρ

Así tenemos:

$$\begin{aligned} \iint_D e^{-(x^2+y^2)} dx dy &= \int_2^3 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho e^{-\rho^2} d\theta \right) d\rho = \left(\int_2^3 \rho e^{-\rho^2} d\rho \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \right) = \left[-\frac{1}{2} e^{-\rho^2} \right]_2^3 \left[\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= \frac{\pi}{4} (e^{-4} - e^{-9}) \end{aligned}$$

El resultado es $\frac{\pi}{4} (e^{-4} - e^{-9})$

Ejercicio 6

Tenemos que calcular $D_u f(0,1) = \langle \nabla f(0,1), u \rangle$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{1 + (x\sqrt{1+y^2})^2} \sqrt{1+y^2} + \cos(x)e^{\text{sen}x} + \frac{y-x}{x+y} \frac{(y-x) + (x+y)}{(y-x)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\sqrt{1+y^2}}{1+x^2(1+y^2)} + \cos(x)e^{\text{sen}x} + \frac{2y}{y^2-x^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{1 + (x\sqrt{1+y^2})^2} \frac{x}{2\sqrt{1+y^2}} 2y + \frac{y-x}{x+y} \frac{(y-x) - (x+y)}{(y-x)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{xy}{(1+x^2(1+y^2))\sqrt{1+y^2}} - \frac{2x}{y^2-x^2}$$

Por lo tanto, obtenemos:

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\sqrt{1+y^2}}{1+x^2(1+y^2)} + \cos(x)e^{\text{sen}x} + \frac{2y}{y^2-x^2}, \frac{xy}{(1+x^2(1+y^2))\sqrt{1+y^2}} - \frac{2x}{y^2-x^2} \right)$$

Sustituido en el (0,1) obtenemos $\nabla f(0,1) = (3 + \sqrt{2}, 0)$.

Así la derivada direccional toma el valor

$$D_u f(0,1) = \langle \nabla f(0,1), u \rangle = \langle (3 + \sqrt{2}, 0), \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \rangle = \frac{3 + \sqrt{2}}{2}$$

Fuente: Enunciados correspondientes a exámenes de diferentes años de la Universidad Politécnica de Valencia.