EXAMEN de MÉTODOS MATEMÁTICOS III

(2º FÍSICA)

1. Utilizando métodos de variable compleja, calcular el valor de la integral:
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{(x+8)^2}\,dx$$

2. Resolver la ecuación diferencial $y'' - 4y' + 4y = 169\sin(3x)$

3. Hallar la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales:
$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= x \end{aligned}\right\} \text{ con condiciones iniciales } x(0)=1 \text{ e } y(0)=0$$

4. Resolver en serie de potencias alrededor de $x = 0$ la ecuación: $(x^2 - 1)y'' - 2y = 0$

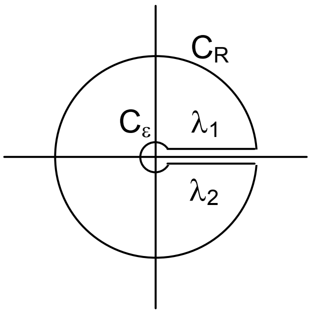
5. Calcular $\int_{-2}^{0} x^2 \delta(x^2 - 1)\,dx$

Problema 1

Consideremos la función multivaluada $f(z) = z^{1/3} R(z) = \dfrac{z^{1/3}}{(z+8)^2}$

$R(z)$ es una función racional con un único polo doble en $z_0 = -8 \notin [0,+\infty[$

Aplicando el teorema de los residuos a $\gamma = \mathrm{C_R} \cup \lambda_2 \cup \mathrm{C}_\varepsilon \cup \lambda_1$ (sentido positivo)



$$\oint_\gamma f = \underbrace{\int_{C_R} f}_{0} + \underbrace{\int_{C_\varepsilon} f}_{0} + \underbrace{\int_{\lambda_1} f}_{\int_0^\infty f} + \underbrace{\int_{\lambda_2} f}_{-e^{i2\pi/3}\int_0^\infty f} = \oint_\gamma f = 2\pi i \,\mathrm{Res}(f,-8)$$

Calculamos el residuo:

$$\mathrm{Res}(f,-8) = \lim_{z\to -8} \frac{d}{dz}\left[(z+8)^2 f(z)\right] = \lim_{z\to -8} \frac{1}{3} z^{-2/3} = \frac{1}{3}\left(8e^{i\pi}\right)^{-2/3} = \frac{1}{12} e^{-i\frac{2\pi}{3}}$$

Por tanto,

$$\int_0^{+\infty} f = \frac{2\pi i}{1-e^{i2\pi/3}} \frac{1}{12} e^{-i\frac{2\pi}{3}} = \frac{\pi}{12} \frac{2i}{e^{-i\pi/3} - e^{i\pi/3}} e^{-i\pi} = \frac{\pi}{12\sin(\pi/3)} = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$$

Problema 2

La EDO $y'' - 4y' + 4y = 169\sin(3x)$ es lineal completa de 2º orden.

- EDOL homogénea: $y'' - 4y' + 4y = 0$

  ecuación característica: $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \ \Rightarrow \lambda = 2 \text{ doble} \Rightarrow \begin{cases} y_1(x) = e^{2x} \\ y_2(x) = xe^{2x} \end{cases}$ l.i.

  solución general de la homogénea: $y_h(x) = C_1\, e^{2x} + C_2\, xe^{2x}$

- Solución particular de la EDOL completa:

  $y_p = A\sin(3x) + B\cos(3x) \quad y'_p = 3A\cos(3x) - 3B\sin(3x) \quad y''_p = -9A\sin(3x) - 9B\cos(3x)$

  $y''_p - 4y'_p + 4y_p = 169\sin(3x) \ \Rightarrow \ \begin{cases} -5A + 12B = 0 \\ -5B - 12A = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad A = -5, B = 12$

- Solución general de la EDOL completa:

  $y(x) = e^{2x}(C_1 + C_2 x) - 5\sin(3x) + 12\cos(3x)$

Problema 3

Sistema en forma matricial: $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = (\lambda-1)(\lambda+1) \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 & \Rightarrow \quad e^t \\ \lambda_2 = -1 & \Rightarrow \quad e^{-t} \end{cases}$$

Vectores propios:

$$\lambda_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad -a+b=0 \quad \Rightarrow \quad \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad a+b=0 \quad \Rightarrow \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Solución General:

$$\vec{\boldsymbol{x}}(t) = C_1\vec{u}_1\, e^t + C_2\vec{u}_2\, e^{-t} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x(t) = C_1 e^t + C_2\, e^{-t} \\ y(t) = C_1 e^t - C_2\, e^{-t} \end{cases}$$

Condiciones iniciales:

$$\left.\begin{aligned} 1 = x(0) = C_1 + C_2 \\ 0 = y(0) = C_1 - C_2 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$$

Solución:

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2} = \cosh t \\ y(t) = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2} = \sinh t \end{cases}$$

Problema 4

Como $x=0$ no es polo de $p(x)=0$ ni de $q(x)=\dfrac{2}{x^2-1}$, entonces $x=0$ es un punto ordinario de la ecuación diferencial $(x^2-1)y''-2y=0$.

Por tanto, existe una solución $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ con a_0 y a_1 arbitrarios. Además, el radio de convergencia de la serie será 1, que es la distancia a $x=\pm 1$, polos de $q(x)$.

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \quad \Rightarrow \quad y'=\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1} \quad \Rightarrow \quad y''=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$$

Sustituyendo en la EDO:

$$(x^2-1)\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$

Coeficiente de x^{n-2}:

$$-n(n-1)a_n \quad n=2,3,\dots \quad \overset{n-2=k}{\Rightarrow} \quad -(k+2)(k+1)a_{k+2} \quad k=0,1,\dots$$

Coeficiente de x^n:

$$n(n-1)a_n-2a_n \quad n=0,1,\dots$$

Sumando los coeficientes e igualando a cero:

$$n(n-1)a_n-2a_n-(n+2)(n+1)a_{n+2}=0 \qquad n=0,1,\dots$$

$$(n+1)(n-2)a_n-(n+2)(n+1)a_{n+2}=0 \quad \Rightarrow \quad a_{n+2}=\frac{n-2}{n+2}a_n$$

n par:

$$a_2=-a_0 \qquad \text{y} \qquad a_{2k}=0 \quad k=0,1,\dots$$

n impar:

$$a_{2k+1}=\frac{-a_1}{(2k+1)(2k-1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k-1}\right)a_1 \qquad k=1,2,\dots$$

Así, tenemos

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k}x^{2k}+\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k+1}x^{2k+1}=a_0(1-x^2)+\frac{a_1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k-1}\right)x^{2k+1}$$

Las series que aparecen son sumables para $|x|<1$:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}=\int\frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right)dx=\int\sum_{k=0}^{\infty}x^{2k}\,dx=\int\sum_{k=0}^{\infty}\left(x^2\right)^k dx=\int\frac{1}{1-x^2}\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)dx=\frac{1}{2}\left[-\log(1-x)+\log(1+x)\right]=\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{2k-1}=x^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k-1}}{2k-1}=x^2\sum_{r=-1}^{\infty}\frac{x^{2r+1}}{2r+1}=x^2\left(-x^{-1}+\sum_{r=0}^{\infty}\frac{x^{2r+1}}{2r+1}\right)=-x+\frac{x^2}{2}\log\frac{1+x}{1-x}$$

Con lo que

$$y(x)=a_0(1-x^2)+\frac{a_1}{2}\left[\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+x-\frac{x^2}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right]=$$

$$=a_0(1-x^2)+\frac{a_1}{2}\left[\frac{1}{2}(1-x^2)\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+x\right]=(1-x^2)\left[a_0+\frac{a_1}{4}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right]+\frac{a_1}{2}x$$

Por tanto, la solución general es

$$y(x)=2B\,x+(1-x^2)\left[A+B\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right]$$

Problema 5

$$x^2 - 1 = 0 \qquad \Rightarrow \quad x = \pm 1 \text{ son raíces simples de } f(x) = x^2 - 1$$

Con lo que

$$\delta(x^2-1) = \frac{1}{|f'(1)|}\delta(x-1) + \frac{1}{|f'(-1)|}\delta(x+1) = \frac{1}{2}\left(\delta(x-1)+\delta(x+1)\right)$$

Por tanto

$$\int_{-2}^{0} x^2\delta(x^2-1)dx = \frac{1}{2}\underbrace{\int_{-2}^{0} x^2\delta(x-1)dx}_{\substack{=0 \\ \text{porque } 1\notin(-2,0)}} + \frac{1}{2}\underbrace{\int_{-2}^{0} x^2\delta(x+1)dx}_{\substack{=(-1)^2 \\ \text{porque } -1\in(-2,0)}} = \frac{1}{2}$$

Fuente: enunciados correspondientes a exámenes de diferentes años de la Universidad de Valencia.