EXÁMEN DE MATEMÁTICA APLICADA

(MODELO 2007/2008)

FARMACIA

1.Calcula

a) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} + x^3 dx$

b) $\int xe^{5x} dx$

SOLUCIÓN:

a) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} + x^3 dx =$

$=\int_0^1 \sqrt{1-x^2} + \int_0^1 x^3 dx = (\text{CAMB. VAR+ INMEDIATA}) \; x = sent \begin{cases} dx = \cos t dt \\ t = arcsenx \end{cases}$

$=\int_{x=0}^{x=1} \sqrt{1-sen^2 t} \cos t dt + \int_0^1 x^3 dx =(*)$

$=\int_{x=0}^{x=1} \cos^2 t dt + \left.\frac{x^4}{4}\right)_0^1 =(**)$

$=\int_{x=0}^{x=1} \frac{1+\cos 2t}{2} dt + (\frac{1^4}{4} - \frac{0^4}{4}) =$

$=\int_{x=0}^{x=1} \frac{1+\cos 2t}{2} dt + (\frac{1^4}{4} - \frac{0^4}{4}) =$

$=\int_{x=0}^{x=1} \frac{1}{2} dx + \int_{x=0}^{x=1} \frac{\cos 2t}{2} dt + \frac{1}{4} =$

$=\left.\frac{1}{2}t\right)_{x=0}^{x=1} + \frac{1}{4}\int_{x=0}^{x=1} 2\cos 2t dt + \frac{1}{4} =$

$=\left.\frac{1}{2}t\right)_{x=0}^{x=1} + \left.\frac{1}{4}sen 2t\right)_{x=0}^{x=1} + \frac{1}{4} =$ (DESHACEMOS EL CAMBIO)

$=\left.\frac{1}{2}arcsenx\right)_{x=0}^{x=1} + \left.\frac{1}{4}sen(2arcsenx)\right)_{x=0}^{x=1} + \frac{1}{4} =$

$=\frac{1}{2}arcsen1 - \frac{1}{2}arcsen0 + \frac{1}{4}sen(2arcsen1) - \frac{1}{4}sen(2arcsen0) + \frac{1}{4} =$

$=\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{4}sen(2 \cdot \frac{\pi}{2}) - \frac{1}{4}sen(2 \cdot 0) + \frac{1}{4} =$

$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}sen(\pi)-\frac{1}{4}sen(0)+\frac{1}{4}=$

$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}$

(*) $\sqrt{1-sen^2 t}=\cos 2t$
(**) $\cos^2 t=\frac{1+\cos 2t}{2}$

b) $\int xe^{5x}dx =_{\text{(POR PARTES)}} \longrightarrow \quad \begin{cases} u=x \longrightarrow du=dx \\ dv=e^{5x}dx \longrightarrow v=\frac{1}{5}e^{5x} \end{cases}$

$=\frac{xe^{5x}}{5}-\int\frac{1}{5}e^{5x}dx=$

$=\frac{xe^{5x}}{5}-\frac{1}{5}\frac{1}{5}\int 5e^{5x}dx=$

$=\frac{xe^{5x}}{5}-\frac{1}{25}e^{5x}$

2.En una piscina de una piscifactoría tenemos una variedad de cangrejo. La velocidad de crecimiento de la población de dicho cangrejo es proporcional al tamaño de la población (con constante de proporcionalidad k). Esta velocidad se ve alterada por la retirada en cada instante de $2k$ cangrejos. Por cuestiones técnicas el tiempo se mide en fracciones de 15 minutos y a las 8:30 de la mañana de hoy había 1500 cangrejos y al terminar el turno (16:00 horas) hay 4000. Determinar los que habrá mañana a las 8:00 horas.

SOLUCIÓN:

$$\begin{cases} y(t) = \text{cantidad de cangrejos} \\ y'(t) = \text{velocidad de crecimiento de la población} \\ t = \text{tiempo (15 min.)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(0)=1500 \\ y(30)=4000 \end{cases}$$

¿$y(94)$?

$y'(t)=ky(t)-2k \longrightarrow$
$y'(t)-ky(t)=-2k$ (ECUACIÓN LINEAL 1ª ORDEN)

$$\boxed{y'(t)+p(x)y(t)=q(t) \qquad \Rightarrow \qquad y(t)=e^{-\int p(x)dx}\left(C+\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right)}$$

Resolvemos la ecuación mediante la fórmula:

$$y(t) = e^{-\int -kdx}(C + \int -2ke^{\int -kdx}dx) =$$

$$= e^{kt}(C + \int -2ke^{-kt}dx) =$$

$$= e^{kt}(C + 2\int -ke^{-kt}dx) =$$

$$= e^{kt}(C + 2e^{-kt}) =$$

$$= Ce^{kt} + 2 \quad \rightarrow \text{SOLUCIÓN GENERAL}$$

Sustituimos los datos en la ecuación para obtener los valores de C y k, de esta forma obtendremos la solución particular:

- $y(0) = 1500$
  $1500 = C + 2$

- $y(30) = 4000$
  $4000 = Ce^{30k} + 2$

Con estas dos ecuaciones formamos un sistema de donde podemos obtener los valores de C y k

$$\begin{cases} 1500 = C + 2 \\ 4000 = Ce^{30k} + 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \rightarrow \boxed{\text{C=1498}} \\ \hookrightarrow 4000 = 1498e^{30k} + 2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{3998}{1498} = e^{30k} \rightarrow \ln(\frac{3998}{1498}) = 30k \rightarrow k = \frac{\ln(\frac{3998}{1498})}{30} \rightarrow \boxed{\text{k≈0.032}}$$

Por tanto la solución particular es:

$y(t) = 1498e^{0.032t} + 2$

$y(94) = 1498e^{0.032 \cdot 94} + 2 \approx 32462$ cangrejos

3. Calcula las derivadas parciales de:

$f(x, y) = \frac{xz+yz}{x^2} + \cos(xz^2)$

SOLUCIÓN:

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{zx^2-(xz+yz)2x}{x^4} - z^2 sen(xz^2)$

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{z}{x^2}$

$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{x+y}{x^2} - 2zx sen(xz^2)$

4. En la farmacia de un hospital se recibe una partida de 2000 frascos de un determinado producto. Sabemos que el 0.2% de los frascos suele romperse durante el transporte.

a) ¿Cuántos frascos esperamos que se rompan durante el transporte?

b) Probabilidad de que se rompan 10 frascos durante el transporte

c) Probabilidad de que se rompan como mucho 3 frascos durante el transporte

SOLUCIÓN:

(Las probabilidades las calcularemos a partir de la tabla de la distribución. Permiten tenerlas en el exámen)

$$\begin{cases} p = \text{ probabilidad de romperse un frasco} = 0.02\% = 0.0002 \\ n = 2000 \end{cases}$$

Como p es muy pequeña y n muy grande sabemos que tenemos una distribución Poisson $(P(\lambda))$

$\lambda = np = 2000 \cdot 0.0002 = 4$

Por tanto:

$X =$nº de frascos que se romperán$\sim P_o(4)$

a) Nos piden la esperanza de la distribución

$$E(X) = \lambda = np = 2000 \cdot 0.0002 = 4$$

b) $P(X = 10) = 0.0053$

c) $P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) =$
$= 0.0183 + 0.0733 + 0.1465 + 0.1954 =$
$.= 0.4335$

Fuente: enunciados correspondientes a exámenes de distintos años de la Universidad de Valencia.