MATEMÁTICAS AVANZADAS PARA ACTUARIOS
LICENCIATURA EN CC. ACTUARIALES Y FINANCIERAS

1.- Demuestra que la función beta es simétrica respecto a la bisectriz, es decir:

$$\beta(p,q)=\beta(q,p)\ \forall p,q>0 .$$

2.- **a)** Estudia el carácter de la siguiente integral: $\int_1^{+\infty}\frac{2}{x^2+3x+4}dx$.

b) Calcula $\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{200}dx$.

3.- Obtenga la solución y estudie el comportamiento de la trayectoria temporal obtenida de la ecuación:

$$5y(t+1)-y(t)=100, \text{ con } y(0)=20.$$

4.- Clasifique y obtenga la solución general de la siguiente ecuación:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\cos(y)+2}{x\mathrm{sen}(y)-y+1}.$$

5.- Resuelva la siguiente integral:

$$\iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy, \text{ con } D=\{(x,y)\in R^2 / x\geq 0, y\leq 0, 4\leq x^2+y^2\leq 9\}.$$

6.- Obtenga la solución general de la siguiente ecuación:

$$y''+2y'-3y=e^x$$

SOLUCIONES

1.- Demuestra que la función beta es simétrica respecto a la bisectriz, es decir:

$$\beta(p,q) = \beta(q,p)\ \forall p,q > 0\,.$$

Sabemos: $\beta(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$

Realizamos el cambio de variable x=1-t, así dx=-dt, y como t=1-x los nuevos límites de integración son: $\begin{cases} x = 0 \to t = 1 \\ x = 1 \to t = 0 \end{cases}$.

Por tanto:

$$\beta(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx = \int_1^0 (1-t)^{p-1}t^{q-1}(-dt) =$$

$$= -\int_1^0 (1-t)^{p-1}t^{q-1}dt = \int_0^1 t^{q-1}(1-t)^{p-1}dt = \beta(q,p)$$

2.- a) Estudia el carácter de la siguiente integral: $\int_1^{+\infty} \frac{2}{x^2+3x+4}dx$.

Dado que el intervalo de integración no está acotado, se tiene una integral impropia de primera especie. Sin embargo no se trata de una integral impropia de segunda especie ni una integral impropia mixta.

Vamos a utilizar para averiguar su carácter el primer criterio de comparación:
Sean f(x) y g(x) tales que 0≤ f(x) ≤ g(x), ∀x≥ 1, entonces si $\int_1^{+\infty} g(x)dx$ converge, entonces $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge.

Tenemos f(x)=$\frac{2}{x^2+3x+4}$, como $\forall x \geq 1$ se tiene $0 \geq x^2+3x+4 \geq x^2$, entonces $0 \leq f(x) \leq g(x) = \frac{2}{x^2}$, $\forall x \geq 1$.

Además $\int_1^{+\infty} g(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b 2x^{-2}dx = \lim_{b\to+\infty}\left[-2x^{-1}\right]_1^b = \lim_{b\to+\infty}(-2b^{-1}+2) = 2$.

Luego $\int_1^{+\infty} g(x)dx$ converge y por el primer criterio de comparación $\int_1^{+\infty} \frac{2}{x^2+3x+4}dx$ también converge.

2.- b) Calcula $\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{200}dx$.

Recordamos que dado un número real positivo p, se define la función Gamma como $\Gamma(p)=\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{p-1}dx$.

Por lo tanto $\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{200}dx=\Gamma(201)$.

Por otra parte, sabemos que si n es un número natural entonces $\Gamma(n)=(n-1)!$, así tenemos que $\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{200}dx=\Gamma(201)=(200)!$

3.- Obtenga la solución y estudie el comportamiento de la trayectoria temporal obtenida de la ecuación:

$$5y(t+1)-y(t)=100, \text{ con } y(0)=20.$$

Podemos escribir la ecuación como $y(t+1)-\frac{1}{5}y(t)=20$, que es una ecuación en diferencias finitas con $a=-\frac{1}{5}$ y $b=20$.

Como $a\neq -1$, la solución viene dada por $y(t)=(-a)^t\left[y(0)-\frac{b}{1+a}\right]+\frac{b}{1+a}$, sustituyendo los valores de a, b e y(0) tenemos:

$$y(t)=-5\left(\frac{1}{5}\right)^t+25.$$

Además se tiene que:

$|-a|=\frac{1}{5}<1 \Rightarrow$ la trayectoria es convergente .

$-a=\frac{1}{5}>0 \Rightarrow$ la trayectoria no es oscilante.

4.- Clasifique y obtenga la solución general de la siguiente ecuación:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\cos(y)+2}{x\operatorname{sen}(y)-y+1}.$$

Podemos reescribir la ecuación como:

$$(-\cos(y)-2)dx+(x\operatorname{sen}(y)-y+1)dy=0$$

Sean $\begin{cases} M(x,y)=-\cos(y)-2 \\ N(x,y)=x\operatorname{sen}(y)-y+1 \end{cases}$,

como $\frac{\partial M}{\partial y}=\operatorname{sen}(y)=\frac{\partial N}{\partial x}$ se trata de una ecuación diferencial de orden uno exacta.

Buscamos la función potencial U(x,y) así la solución general será U(x,y)=C.

$$\frac{\partial U}{\partial x}=M(x,y)=-\cos(y)-2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow U(x,y)=\int(-\cos(y)-2)dx+\varphi(y)=-x\cos(y)-2x+\varphi(y)$$

Por otra parte,

$$\frac{\partial U}{\partial y}=N(x,y)=x\operatorname{sen}(y)-y+1\Rightarrow x\operatorname{sen}(y)+\varphi'(y)=x\operatorname{sen}(y)-y+1\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \varphi'(y)=-y+1\Rightarrow \varphi(y)=-\frac{y^2}{2}+y$$

Así la solución general es: $-x\cos(y)-2x-\frac{y^2}{2}+y=C$.

5.- Resuelva la siguiente integral:

$$\iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy, \quad \text{con } D=\{(x,y)\in R^2 / x\geq 0, y\leq 0, 4\leq x^2+y^2\leq 9\}.$$

Nuestro recinto es el encerrado entre las circunferencias concéntricas con centro el origen y radios respectivos 2 y 3, en el cuarto cuadrante.

Si hacemos un cambio a coordenadas polares $\begin{cases} x=\rho\cos(\theta) \\ y=\rho\,\mathrm{sen}(\theta)\end{cases}$,

se tiene que el recinto se convierte en $D^*=\left\{(\rho,\theta)\in R^2 / 2\leq\rho\leq 3, \frac{3\pi}{2}\leq\theta\leq 2\pi\right\}$

Así:

$$\iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\left(\int_2^3 e^{-\rho^2}\rho d\rho\right)d\theta = \left(\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}d\theta\right)\left(\int_2^3 \rho e^{-\rho^2}d\rho\right) =$$

$$= [\theta]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\left[\frac{-1}{2}e^{-\rho^2}\right]_2^3 = -\frac{\pi}{4}\left(e^{-9}-e^{-4}\right)$$

6.- Obtenga la solución general de la siguiente ecuación:

$$y''+2y'-3y=e^x$$

Se trata de una ecuación diferencial lineal de orden dos, coeficientes constantes no homogénea.

La solución viene dada por $y(x)=y_H(x)+y_P(x)$, donde $y_H(x)$ es la solución general de la ecuación homogénea asociada e $y_P(x)$ es una solución particular de la ecuación no homogénea.
Calculamos $y_H(x)$ como solución de $y''+2y'-3y=0$.
Polinomio característico: $r^2+2r-3=0$, cuyas soluciones son r=1 y r=-3.

$$\Rightarrow y_H(x)=Ae^x+Be^{-3x}$$

Calculamos $y_P(x)$ usando el método de coeficientes indeterminados.

$$y_P(x)=Cxe^x$$

Derivamos esta expresión:

$$y_P'(x)=C(x+1)e^x;\ y_P''(x)=C(x+2)e^x$$

Sustituyendo en la ecuación tenemos $4Ce^x=e^x \Rightarrow$ 4C=1 $\Rightarrow C=\frac{1}{4}$.

$$\Rightarrow y_P(x)=\frac{1}{4}xe^x.$$

Por lo tanto la solución general de la ecuación no homogénea viene dada por:

$$y(x)=Ae^x+Be^{-3x}+\frac{1}{4}xe^x.$$

Fuente: enunciados correspondientes a exámenes de diferentes años de la Universidad de Valencia.