

EXAMEN DE MATEMÁTICAS ECONOMICO-EMPRESARIALES ADE

1. Estudia la continuidad de la siguiente función en los puntos (0,0) y (3,1)

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2, & x \leq y \\ x^2 - y^2, & x > y \end{cases}$$

Solución:

Estudiamos la continuidad en el punto (0,0). Como el punto es frontera, podemos acercarnos a él por ambas regiones, por lo que para calcular el límite deberemos hacer los dos límites siguientes:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2 + y^2 = 0$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2 - y^2 = 0$$

de donde deducimos que:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$$

Como $\exists f(0,0) = 0$, deducimos que:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = f(0,0)$$

y por tanto la función es continua en el punto (0,0).

Veamos ahora el punto (3,1). Como no es frontera, estamos en una de las dos regiones, en concreto en $x > y$

Por tanto, estudiamos su continuidad:

$$1. \exists f(3,1) = 3^2 - 1^2 = 9 - 1 = 8$$

$$2. \exists \lim_{(x,y) \rightarrow (3,1)} x^2 - y^2 = 8$$

$$3. f(3,1) = 8 = \lim_{(x,y) \rightarrow (3,1)} x^2 - y^2$$

Por tanto, la función es continua en (3,1)

2. Dadas las funciones:

$$f(x,y) = \sqrt[3]{xy^2}$$

$$g(x,y) = \frac{e^x}{\ln(2y)}$$

Calcula las derivadas parciales de f(x,y) y la expresión de la diferencial de g(x,y) en el punto (0,e)

Solución:

Calcularemos las diferenciales, escribiendo f como:

$$f(x,y) = (xy^2)^{\frac{1}{7}}$$

Entonces:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{7}(xy^2)^{\frac{-6}{7}} \cdot y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{7}(xy^2)^{\frac{-6}{7}} \cdot 2xy$$

La expresión de la diferencial es la siguiente:

$$dg(a,b)(dx,dy) = \frac{\partial g}{\partial x}(a,b) \cdot dx + \frac{\partial g}{\partial y}(a,b) \cdot dy$$

asi que calculamos las derivadas parciales y sustituimos en el punto (0,e):

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{e^x}{\ln(2y)} \implies \frac{\partial g}{\partial x}(0,e) = \frac{e^0}{\ln(2e)} = \frac{1}{\ln(2) + \ln(e)} = \frac{1}{\ln(2) + 1}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{-e^x \cdot \frac{2}{2y}}{(\ln(2y))^2} \implies \frac{\partial g}{\partial y}(0,e) = \frac{-e^0 \cdot \frac{2}{2 \cdot e}}{(\ln(2e))^2} = \frac{-\frac{1}{e}}{(1 + \ln(2))^2} = \frac{-1}{e \cdot (1 + \ln(2))^2}$$

Sustituyendo en la expresión de la diferencial tenemos:

$$dg(0,e)(dx,dy) = \frac{\partial g}{\partial x}(0,e) \cdot dx + \frac{\partial g}{\partial y}(0,e) \cdot dy = \frac{1}{\ln(2) + 1} \cdot dx + \frac{-1}{e \cdot (1 + \ln(2))^2} \cdot dy$$

3. Los beneficios de una empresa vienen dados por la funcion:

$$B(t,p) = \frac{50 - 3t}{7p^2 - 22}$$

donde t es el tiempo y p es el IPC. El tiempo actual es t=1, y el IPC es p = 3. Se estima que

$$\frac{\partial p}{\partial t} = 0.3$$

Calcula $\frac{\partial B(t,p)}{\partial t} (1,3)$ y $\frac{\partial B(t,p)}{\partial t} 1$. Interpreta estas derivadas explicando la diferencia entre ambas. Según estas estimaciones, ¿los beneficios de la empresa van a aumentar o disminuir a corto plazo?

Solución:

Calculamos $\frac{\partial B}{\partial t}(t, p) = \frac{-3}{7p^2 - 22}$ y por tanto $\frac{\partial B}{\partial t}(t, p)_{(1,3)} = \frac{-3}{7 \cdot 3^2 - 22} = \frac{-3}{41} = -0,073$

Mediante la regla de la cadena, calculamos :

$$\begin{aligned} \frac{\partial B(t)}{\partial t} &= \frac{\partial B}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} = \\ &= \frac{-3}{7p^2 - 22} \cdot 1 + \frac{-(50 - 3t) \cdot 14p}{(7p^2 - 22)^2} \cdot 0,3 \end{aligned}$$

Por tanto, sustituyendo en el punto

$$\frac{\partial B(t)}{\partial t} \Big|_1 = \frac{-3}{7 \cdot 3^2 - 22} \cdot 1 + \frac{-(50 - 3) \cdot 14 \cdot 3}{(7 \cdot 3^2 - 22)^2} \cdot 0,3 = -0,073 - 1,174 \cdot 0,3 = -0,4252$$

La diferencia entre estas dos derivadas es que la primera mide el cambio en los beneficios (en m.u.) al pasar un año, suponiendo que el IPC es constante, o sea, que el paso del tiempo no afecta al valor del IPC. La segunda mide el mismo cambio pero suponiendo que el IPC y el tiempo están relacionados, o sea, que el IPC depende del tiempo.

Según las estimaciones realizadas, los beneficios de la empresa disminuirán ya que el signo de la segunda derivada que hemos calculado (la más creíble de las dos, ya que supone que el IPC depende del tiempo) es negativo.

4. Dada $z = uv + v^4$ donde $u = x \operatorname{sen}(y)$ y $v = ye^{xy}$, calcula $\frac{\partial z}{\partial y}$ usando la regla de la cadena.

Solución:

Usamos la regla de la cadena y calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = v \cdot x \cos y + (u + 4v^3) \cdot (e^{xy} + y \cdot x \cdot e^{xy})$$

Sustituyendo el valor de u y de v queda:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = y \cdot e^{xy} \cdot x \cos y + (x \operatorname{sen} y + 4(y \cdot e^{xy})^3) \cdot (e^{xy} + y \cdot x \cdot e^{xy})$$

5. Estudia la convexidad del conjunto

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \leq -x^2 + 1; x \geq 0\}$$

Solución:

El conjunto está formado por dos inecuaciones, la primera genera un nivel de conjunto

inferior:

$C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \leq -x^2 + 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y + x^2 \leq 1\}$ $f(x, y) = y + x^2$. Veamos si la función $f(x, y) = y + x^2$

es convexa. Para ello construimos la matriz Hessiana:

$$Hf(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como su determinante es 0, y sus menores de orden uno son 2 y 0, la función es convexa y el conjunto de nivel inferior es convexo.

La segunda inecuación representa un semiespacio, que sabemos por teoría que es convexo.

Como la intersección de convexos es convexo, podemos concluir que el conjunto C es convexo.

6. Calcula

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-18x}}{52 - e^{-18x}} dx$$

Solución:

La integral es claramente una integral de primera especie, ya que uno de sus límites de integración es infinito. Resolvámosla:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{e^{-18x}}{52 - e^{-18x}} dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{e^{-18x}}{52 - e^{-18x}} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{18} (\ln(52 - e^{-18t}) - \ln(52 - e^0)) = \\ &= \frac{1}{18} (\ln(52 - e^{-18\infty}) - \ln(51)) = \frac{\ln(52) - \ln(51)}{18} = \frac{\ln(\frac{52}{51})}{18} \end{aligned}$$

ya que $e^{-\infty} = 0$

7. Resuelve la ecuación deiferencial :

$$\frac{\partial y}{\partial x} = y^3 \text{sen} x, \quad y(0) = 1$$

Solución:

La ecuación diferencial es de variables separables, ya que la podemos expresar de la forma:

$$\frac{1}{y^3} \partial y = \text{sen} x \partial x$$

Integramos por separado cada lado de la ecuación:

$$\int \frac{1}{y^3} dy = \int \operatorname{sen} x dx \implies \int y^{-3} dy = \int \operatorname{sen} x dx$$
$$\implies \frac{y^{-2}}{-2} = -\operatorname{cos} x + C \implies y^{-2} = 2\operatorname{cos} x - 2C \implies \frac{1}{y^2} = 2\operatorname{cos} x - 2C \implies$$
$$\implies y^2 = \frac{1}{2\operatorname{cos} x - 2C} \implies y = \sqrt{\frac{1}{2\operatorname{cos} x - 2C}}$$

Imponemos la condición inicial $y(0) = 1$ (si $x = 0$, entonces $y = 1$)

$$1 = \sqrt{\frac{1}{2\operatorname{cos} 0 - 2C}} = \sqrt{\frac{1}{2 - 2C}} \implies 1 = \frac{1}{2 - 2C} \implies 2 - 2C = 1 \implies$$
$$\implies 2(1 - C) = 1 \implies 1 - C = \frac{1}{2} \implies C = \frac{1}{2}$$

ya que $\operatorname{cos} 0 = 1$.

Por tanto la solución de la ecuación diferencial es:

$$y(x) = \sqrt{\frac{1}{2\operatorname{cos} x - 1}}$$

Fuente: enunciados correspondientes a exámenes de diferentes años de la Universidad de Valencia.