

MATEMÁTICAS EMPRESARIALES Diplomatura en Empresariales

1. a) Sea $H = \langle (1,1,0), (1, 0, 1) \rangle$
 a.1) ¿(3,2,1,) es un vector de H ?
 a.2) Obtén la ecuación (o ecuaciones) de H

b) Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal dada por $f(x,y) = (x + y, x-y, y)$. Calcula la matriz asociada referida a las bases canónicas.

2. Sea la función

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{si } x > y \\ x - y^2 & \text{si } x \leq y \end{cases}$$

- a) Estudia la continuidad en (2,2) y en (-1,2)
 b) Estudia si f es diferenciable en (2,2) y en (-1,2). En caso afirmativo escribe la diferencial en esos puntos
 c) Calcula la derivada direccional de f en el punto (-1,2) en la dirección del vector (1,1)

3. Dada la función $f(x,y) = \frac{x^3}{y} + 4xy - y^2$

a) Calcula la expresión de $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}$

- b) ¿ $\frac{\partial f}{\partial x}$ es una función homogénea?

4. Calcula los óptimos de la función $z = x^2 + 2y^2 - xy$ sujeta a la restricción $x + y = 8$. Utiliza el método de los multiplicadores de Lagrange.

5. Justifica que la función $f(x) = xe^x$ es integrable Riemann en $[0,4]$ y calcula su integral en dicho intervalo.

6. Razona de qué tipo son las siguientes integrales. Estudia su convergencia y calcula su valor si es posible.

a) $\int_0^{\infty} \frac{x}{x^2 - 4} dx$

b) $\int_1^3 \frac{x}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} dx$

7. Calcula $\int_A dx dy$ siendo $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0, y \leq 2, x + y \leq 3\}$

8. Resuelve la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = y^2 \cos x$ con $y(0) = 1$.

RESOLUCIÓN

1. a) Sea $H = \langle (1,1,0), (1, 0, 1) \rangle$
a.1) ¿(3,2,1) es un vector de H?

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (3,2,1) \text{ es un vector de H}$$

- a.2) Obtén la ecuación (o ecuaciones) de H

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - y - z = 0 \text{ es la ecuación de H}$$

- b) Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal dada por $f(x,y) = (x + y, x-y, y)$. Calcula la matriz asociada referida a las bases canónicas.

Sea $C = \{(1,0), (0,1)\}$ base canónica de \mathbb{R}^2

$$f(1,0) = (1,1,0)$$

$$f(0,1) = (1,-1,1)$$

$$M_f = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Sea la función

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{si } x > y \\ x - y^2 & \text{si } x \leq y \end{cases}$$

- a) Estudia la continuidad en (2,2) y en (-1,2)

En el punto (2,2) hemos de aplicar la definición de continuidad en un punto.

$$1^\circ \exists f(2,2) = -2$$

$$2^\circ \exists \lim_{(x,y) \rightarrow (2,2)} f(x,y). \text{ Hay que calcular dos límites.}$$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (2,2) \\ x > y}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (2,2) \\ x > y}} x^2 + y^2 = 4$$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (2,2) \\ x < y}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (2,2) \\ x < y}} x - y^2 = -2$$

Luego no existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,2)} f(x,y) \Rightarrow f$ no es continua en (2,2)

En el punto $(-1,2)$, $f(x,y) = x - y^2$ es un polinomio $\Rightarrow f$ es continua en ese punto.

b) Estudia si f es diferenciable en $(2,2)$ y en $(-1,2)$. En caso afirmativo escribe la diferencial en esos puntos.

En el punto $(2,2)$, como f no es continua $\Rightarrow f$ no es diferenciable en ese punto.

En el punto $(-1,2)$, $f(x,y) = x - y^2$ es un polinomio $\Rightarrow f$ es diferenciable en ese punto.

Calculemos su diferencial:

$$d_f(-1,2) = \frac{\partial f}{\partial x}(-1,2) \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(-1,2) \cdot dy$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}(-1,2) = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y}(-1,2) = -4$$

$$d_f(-1,2) = 1 \cdot dx + (-4) \cdot dy = dx - 4dy$$

c) Calcula la derivada direccional de f en el punto $(-1,2)$ en la dirección del vector $(1,1)$

$$D_{(1,1)}f(-1,2) = \nabla f(-1,2) \circ (1,1) = (1, -4) \circ (1,1) = 1 \cdot 1 + (-4) \cdot 1 = -3$$

3. Dada la función $f(x,y) = \frac{x^3}{y} + 4xy - y^2$

a) Calcula la expresión de $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}$

Veamos si f es homogénea y aplicaremos después el teorema de Euler.

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{(\lambda x)^3}{\lambda y} + 4\lambda x \lambda y - (\lambda y)^2 = \frac{\lambda^3 x^3}{\lambda y} + 4\lambda^2 xy - \lambda^2 y^2 = \frac{\lambda^2 x^3}{y} + 4\lambda^2 xy - \lambda^2 y^2 = \lambda^2 \left(\frac{x^3}{y} + 4xy - y^2 \right)$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 \cdot f(x,y) \Rightarrow f \text{ homogénea de grado } 2$$

Por el teorema de Euler $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 2 \cdot f(x,y) = 2 \cdot \left(\frac{x^3}{y} + 4xy - y^2 \right)$

b) ¿ $\frac{\partial f}{\partial x}$ es una función homogénea?

Como f es homogénea de grado 2 $\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}$ es homogénea de grado 1

4. Calcula los óptimos de la función $z = x^2 + 2y^2 - xy$ sujeta a la restricción $x + y = 8$. Utiliza el método de los multiplicadores de Lagrange.

Sea la función de Lagrange $L(x,y, \lambda) = x^2 + 2y^2 - xy + \lambda (8 - x - y)$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} = 2x - y - \lambda = 0 &\Rightarrow \lambda = 2x - y \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 4y - x - \lambda = 0 &\Rightarrow \lambda = 4y - x \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 8 - x - y = 0 & \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 2x - y &= 4y - x \Rightarrow x = \frac{5y}{3} \\ 8 - \frac{5y}{3} - y &= 0 \Rightarrow y = 3 \end{aligned} \right\}$$

$$x = \frac{5y}{3} \Rightarrow x = 5$$

$$\lambda = 2x - y \Rightarrow \lambda = 7$$

El punto crítico de L es (5,3,7).

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} &= 2 \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} &= -1 \\ \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} &= 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow H_L(5,3) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$|H_L| = 7 \neq 0$ (Vemos los menores principales conducentes para clasificar la forma cuadrática)

$$H_1 = 2$$

$$H_{12} = |H_L| = 7$$

Como todos los mpc son estrictamente positivos $\Rightarrow H_L$ definida positiva $\Rightarrow \Rightarrow (5,3)$ máximo local

5. Justifica que la función $f(x) = xe^x$ es integrable Riemann en $[0,4]$ y calcula su integral en dicho intervalo.

f es integrable Riemann por ser producto de dos funciones continuas (polinomio y exponencial) en $[0,4]$.

Para calcular la integral, usaremos el método de integración por partes:
Veremos primero la integral indefinida:

$$\int xe^x dx = \left[\begin{aligned} u = x &\Rightarrow du = dx \\ dv = e^x dx &\Rightarrow v = e^x \end{aligned} \right] = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x = (x-1)e^x$$

$$\int_0^4 xe^x dx = \left[(x-1)e^x \right]_0^4 = (4-1)e^4 - (0-1)e^0 = 3e^4 + 1$$

6. Razona de qué tipo son las siguientes integrales. Estudia su convergencia y calcula su valor si es posible.

a) $\int_0^{\infty} \frac{x}{x^2 - 4} dx$ Integral impropia de 1ª especie ya que su límite de integración superior es ∞

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{x^2 - 4} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{x}{x^2 - 4} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_0^t \frac{2x}{x^2 - 4} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} \ln|x^2 - 4| \right]_0^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2} (\ln|t^2 - 4| - \ln 4) = \infty$$

Luego diverge.

b) $\int_1^3 \frac{x}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} dx$ Integral impropia de 2ª especie ya que es integrable Riemann en (1,3]

$$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \lim_{t \rightarrow 1^+} \int_t^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \lim_{t \rightarrow 1^+} \int_t^3 (x-1)^{-2/3} dx = \lim_{t \rightarrow 1^+} \left[\frac{(x-1)^{1/3}}{1/3} \right]_t^3 = \lim_{t \rightarrow 1^+} \left[3\sqrt[3]{x-1} \right]_t^3 =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 1^+} 3\sqrt[3]{3-1} - 3\sqrt[3]{t-1} = 3\sqrt[3]{2}$$

Luego converge.

7. Calcula $\int_A dx dy$ siendo $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0, y \leq 2, x + y \leq 3\}$

Reescribimos $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq 3 - y\}$

$$\int_A dx dy = \int_0^2 \int_0^{3-y} dx dy = \int_0^2 [x]_0^{3-y} dy = \int_0^2 (3-y) dy = \left[3y - \frac{y^2}{2} \right]_0^2 = \left(3 \cdot 2 - \frac{2^2}{2} \right) - \left(3 \cdot 0 - \frac{0^2}{2} \right) = 4$$

8. Resuelve la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = y^2 \cos x$ con $y(0) = 1$.

Esta ecuación es del tipo "variables separables"

$$\frac{dy}{dx} = y^2 \cos x \Rightarrow \frac{dy}{y^2} = \cos x dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y^2} = \int \cos x dx \Rightarrow \frac{-1}{y} = \text{sen} x + k \Rightarrow y = \frac{-1}{\text{sen} x + k}$$

$$y(0) = 1 \Rightarrow \frac{-1}{\text{sen} 0 + k} = 1 \Rightarrow \frac{-1}{1 + k} = 1 \Rightarrow 1 + k = -1 \Rightarrow k = -2$$

$$\text{La solución es } y = \frac{-1}{\text{sen} x - 2}$$

Fuente: enunciados correspondientes a exámenes de diferentes años de la Universidad de Valencia