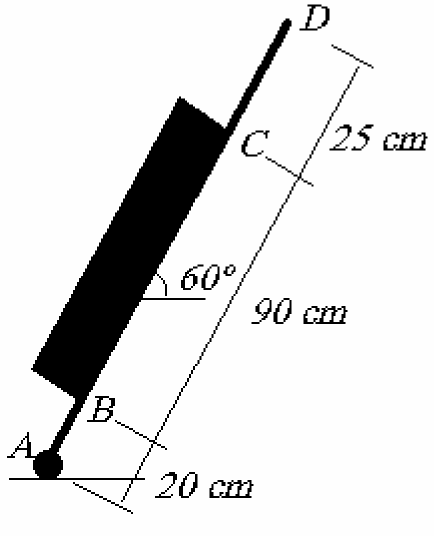
MECÁNICA (CAMINOS)

EXAMEN PROPUESTO 2º CUATRIMESTRE

Junio – 2008

EJERCICIO 1

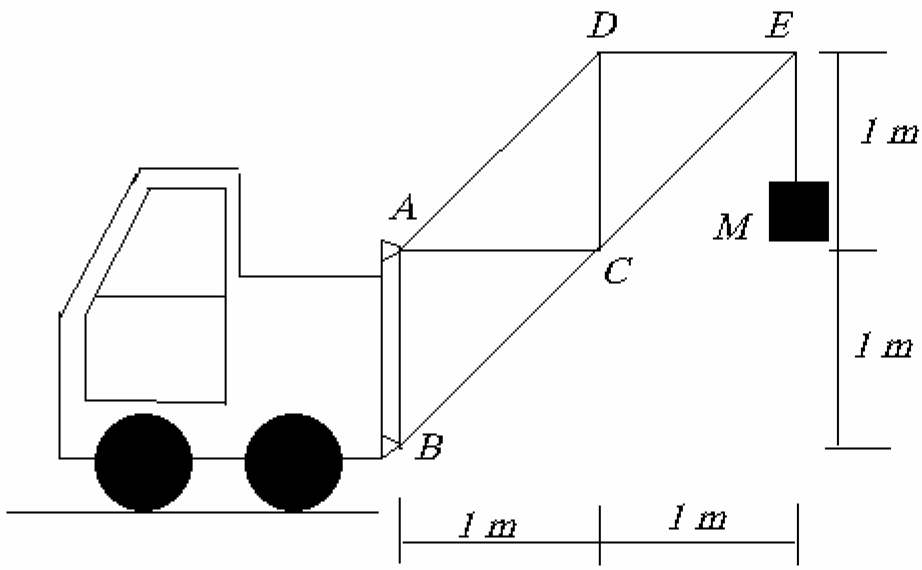
El carrito de la figura está apoyado en un suelo sin rozamiento mediante un rueda en A (apoyo móvil). El punto D, del que se coge el carrito, se considera una articulación ideal. Entre B y C se transporta una masa uniformemente distribuida de valor 45 Kg. Si el ángulo que forma el carrito con la horizontal es 60º, calcular, en la situación de equilibrio, las leyes de esfuerzos axiles, cortantes y flectores. Representar dichas leyes indicando el convenio de signos.



EJERCICIO 2

Al camión de la figura se le une, mediante las articulaciones A y B, una estructura plana articulada que hace las funciones de grúa. De la articulación E cuelga una masa M = 100 Kg. Si las medidas son las mostradas en la figura, calcular, en el equilibrio, los axiles de las barras:

1) *DE por el método de los nudos.*
2) *CD por el método de Ritter.*
3) *AD por el método de trabajos virtuales.*



Suponiendo ahora la estructura deformable, aparece una fuerza recuperadora de 100 N si la masa se separa de su posición de equilibrio 2 mm. Además, si la velocidad de la masa es 1 cm/s, aparece una fuerza disipativa de 40 N. Se pide:

4) *Ecuación diferencial del movimiento de la masa.*
5) *Solución de dicha ecuación. Tipo de movimiento.*

Al poner en marcha el motor del camión se le transmite a la masa una fuerza sinusoidal. Se pide:

6) *Averiguar razonadamente si se puede producir resonancia.*

EJERCICIO 3

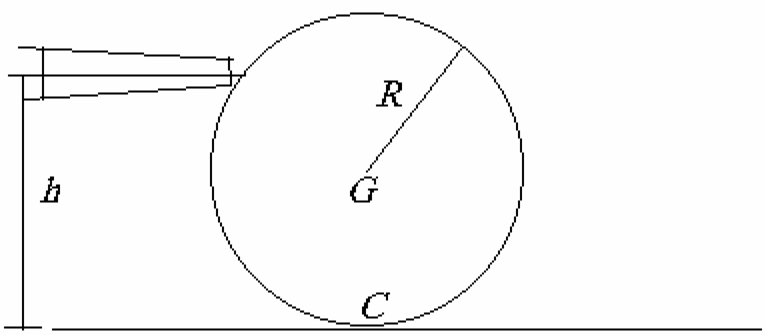
Se golpea una bola de billar, de radio R, con el taco paralelo a la mesa, a un altura h de ésta, según muestra la figura. Se pide:

1) *Valor de h para que la bola gire sin deslizar sobre el tapete después del impacto.*
2) *Signo de la velocidad del punto de contacto con el tapete (C) según se golpee arriba o debajo de la altura anterior.*

Dato: momento de inercia de una esfera de masa m y radio R, respecto de un eje que coincide con uno de sus diámetros:

$$\frac{2}{5}mR^2$$

Sugerencia: escribir la velocidad de C en función de la velocidad del centro de gravedad de la bola y de la altura h.



EJERCICIO 1. SOLUCIÓN

Equilibrio global:

Ver figura adjunta.

(1) $\sum \vec{F} = 0$

Eje x: $R_{Dx} = 0$

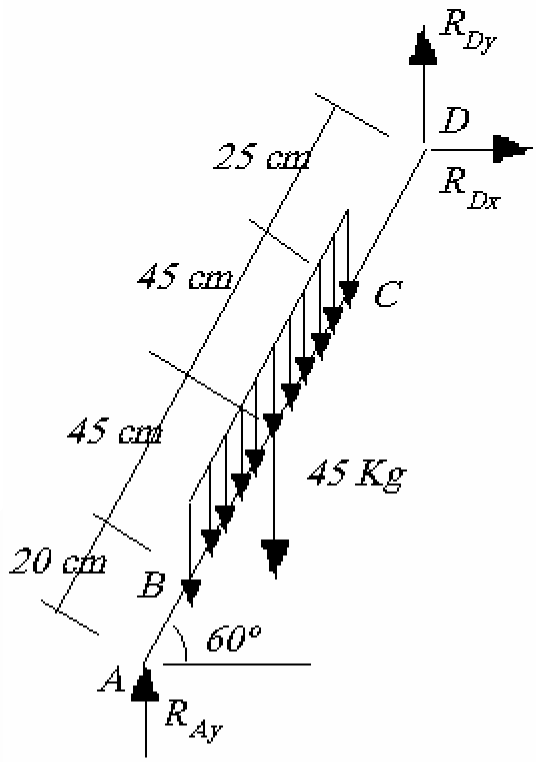
Eje y: $R_{Dy} + R_{Ay} = 45$

(2) $\sum \vec{M}_A = 0$

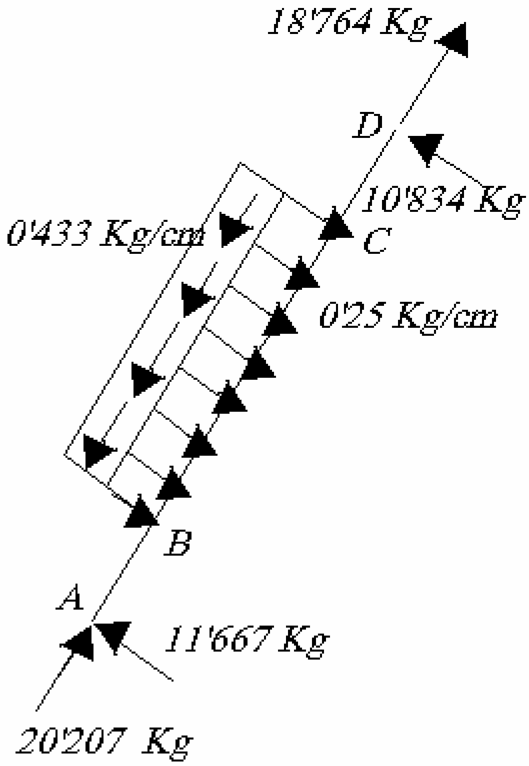
$-65 \cdot \cos 60^o \cdot 45 + 135 \cos 60^o \cdot R_{Dy} = 0$

➔

$R_{Dy} = 21'667$ Kg ➔ $R_{Ay} = 23'333$ Kg



Leyes de esfuerzos: Descomponemos las reacciones y la carga continua en las direcciones longitudinal y perpendicular de la barra, según la siguiente figura:



- *Entre A y B:* $0 \le x \le 20$ *cm*

$$N(x) = -20'207 \text{ Kg}$$
$$T(x) = -11'667 \text{ Kg}$$
$$M(x) = 11'667\cdot x \text{ Kg}\cdot\text{cm} \rightarrow M(0) = 0 \text{ ; } M(20) = 233'34 \text{ Kg}\cdot\text{cm}$$

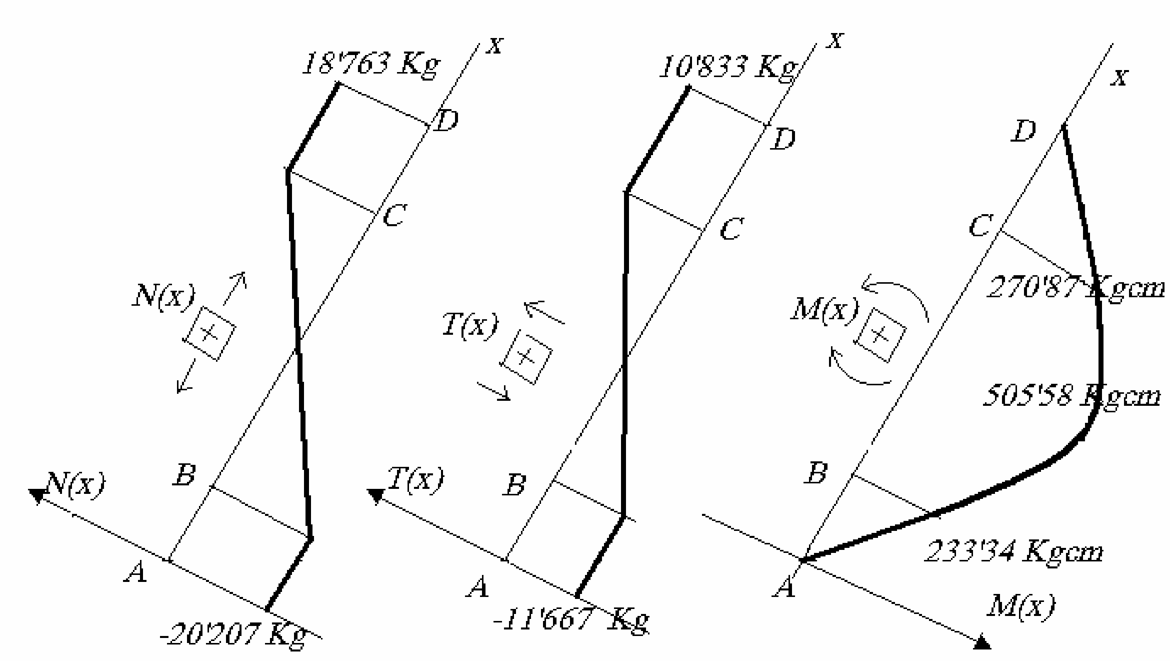
- *Entre B y C:* $20 \le x \le 110$ *cm*

$$N(x) = -20'207 + 0'443\cdot(x-20) \text{ Kg} \rightarrow$$
$$N(20) = -20'207 \text{ Kg ; } N(110) = 18'763 \text{ Kg}$$
$$T(x) = -11'667 + 0'25\cdot(x-20) \text{ Kg} \rightarrow$$
$$T(20) = -11'667 \text{ Kg ; } T(110) = 10'833 \text{ Kg}$$
$$M(x) = 11'667\cdot x - 0'125\cdot(x-20) \text{ Kg}\cdot\text{cm} \rightarrow$$
$$M(20) = 233'34 \text{ Kg}\cdot\text{cm ; } M(110) = 270'87 \text{ Kg}\cdot\text{cm ;}$$
$$M_{MAX} = M(66'668) = 505'58 \text{ Kg}\cdot\text{cm}$$

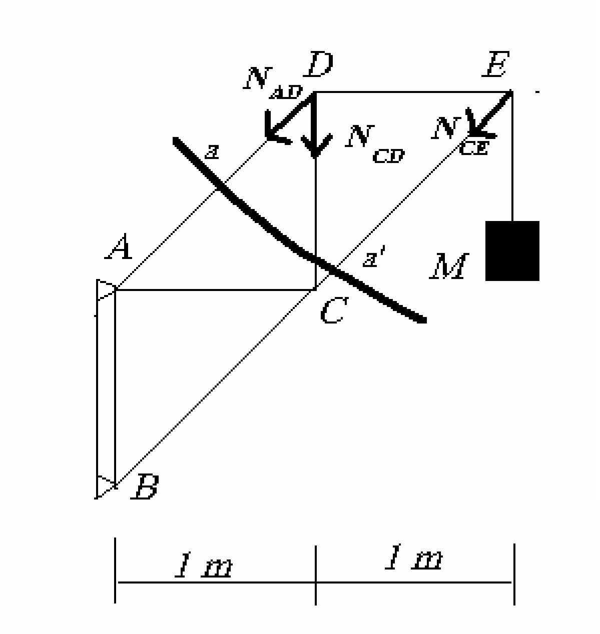
- *Entre C y D:* $110 \le x \le 135$ *cm*

$$N(x) = 18'763 \text{ Kg}$$
$$T(x) = 10'833 \text{ Kg}$$
$$M(x) = 11'667\cdot x - 22'5\cdot(x-65) \text{Kg}\cdot\text{cm} \rightarrow$$
$$M(110) = 270'87 \text{ Kg}\cdot\text{cm; } M(135) = 0'045 \text{ Kg}\cdot\text{cm} \approx 0$$

<u>Diagramas de las leyes de esfuerzos:</u>



EJERCICIO 2. SOLUCIÓN



(1) *Nudos en E:*

$$\sum F_x = 0 \;\Rightarrow\; -N_{DE} - N_{CE}\cos 45^o = 0$$

$\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; -N_{CE}\cos 45^o - 100 = 0 \;\Rightarrow\; N_{CE} = -100\sqrt{2}\,Kg$. *Sustituyendo en la primera ecuación:*

$$\boxed{N_{DE} = 100\,Kg}$$

(2) *Con el corte aa' de la figura tomamos un eje x inclinado 45º respecto a la horizontal:*

$$\sum F_x = 0 \;\Rightarrow\; N_{CD}\cos 45^o + 100\cos 45º = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{N_{DE} = 100\,Kg}$$

(3) *Con el corte aa' de la figura realizamos una rotación de ángulo δα alrededor de C:*

$$N_{AD}\cos 45^o \cdot 1\delta\alpha - 100 \cdot 1\delta\alpha = 0$$

$$\left(\frac{N_{AD}}{\sqrt{2}} - 100\right)\delta\alpha = 0,\ \forall\,\delta\alpha \;\Rightarrow\; \boxed{N_{AD} = 100\sqrt{2}\,Kg}$$

(4) *Constante elástica: K = 100 N / 2 mm = 50000 N/m*
Constante de amortiguamiento: c = 40 N / 1 (cm/s) = 4000 N·s/m

Segunda ley de Newton: $M\ddot{x} = -Kx - c\dot{x} \;\Rightarrow\; \ddot{x} + \frac{c}{M}\dot{x} + \frac{K}{M}x = 0$.

Sustituyendo valores numéricos: $\boxed{\ddot{x} + 40\dot{x} + 500x = 0}$

(5) *Polinomio característico de la ecuación diferencial:* $P(\lambda) = \lambda^2+40\lambda+500$, *cuyas raices* ($P(\lambda) = 0$) *son* $\lambda = -20$в$10i$. *Así la solución es:*

$$\boxed{x(t) = Ae^{-20t}\cos(10t+\varphi)}$$

siendo A y φ dos constantes a determinar con condiciones iniciales. Se trata por tanto de un movimiento vibratorio subamortiguado.

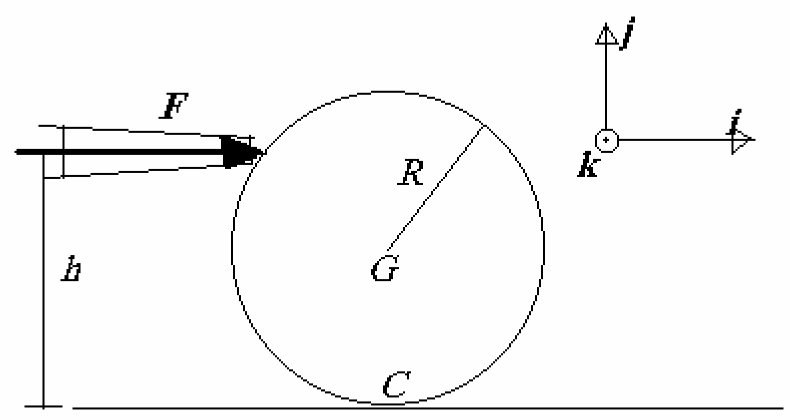
(6) *Calculamos la frecuencia de resonancia* $\omega_r = \omega\sqrt{1-2\xi^2}$ *, siendo* $\omega = \sqrt{\dfrac{K}{M}}$ *la frecuencia angular natural del sistema, y* $\xi = \dfrac{c}{c_c} = \dfrac{c}{2M\omega} = 0'894$ ➔

$1-2\xi^2 = -0'6 < 0$ ➔ *no existe valor de* ω_r*, por tanto no se puede dar resonancia.*

EJERCICIO 3. SOLUCIÓN

- *Primer teorema de la dinámica aplicado a choques:*
  $\sum_i \vec{F}_i = m\cdot\Delta\vec{v}_G$ *, siendo* $\vec{F}_i$ *las percusiones que actúan sobre el sólido rígido, en este caso la bola de billar. Así, si se denota por* v_G *la velocidad del centro de gravedad después de la percusión, se tiene:*

$$\boxed{F = mv_G}$$



- *Segundo teorema de la dinámica aplicado a choques:*
  $\sum_i \vec{M}_G(\vec{F}_i) = I_{Gz} \cdot \Delta\vec{\omega}$. *Si ω es la velocidad angular después de la percusión, entonces:*

  $$\boxed{-(h-R)F = \frac{2}{5}mR^2\omega}$$

  Sustituyendo F en esta última ecuación:

  $$\boxed{\omega = -\frac{5(h-R)v_G}{2R^2}}$$

- *Campo de velocidades:*
  $\vec{v}_C = \vec{v}_G + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{GC} = (v_G + \omega R)\vec{i}$ ➔ $\boxed{v_C = v_G\left(1 - \frac{5(h-R)}{2R}\right)}$

(1) *Valor de h para que gire sin deslizar: $v_C = 0$* ➔ $\boxed{h = \frac{7}{5}R}$

(2) *Podemos escribir $v_C = \frac{5v_G}{2R}\left(\frac{7R}{5} - h\right)$, con v_G siempre positivo, ya que F también lo es. De esta forma:*

- *Si $h < 7R/5$, entonces $v_C > 0$ (C se mueve hacia la derecha).*
- *Si $h > 7R/5$, entonces $v_C < 0$ (C se mueve hacia la izquierda).*

Fuente: enunciados correspondientes a exámenes de diferentes años de la Universidad Politécnica de Valencia.