EXAMEN MECÁNICA DE FLUIDOS

INGENIERÍA SUPERIOR INDUSTRIAL

PROBLEMA 1

Considerar el campo de velocidades

$$\vec{v} = \frac{x}{t+1}\vec{i} + \frac{y}{2(t+1)}\vec{j}$$

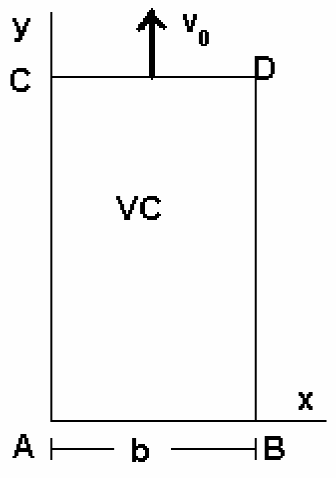
1) Obtener la densidad en cualquier instante si en $t = 0$ su valor es ρ_0.

2) Obtener la expresión de las líneas de corriente en el instante t_1.

3) Calcular la trayectoria de la partícula que en el instante $t = 0$ se encuentra en (x_0,y_0). Escribirla con t como parámetro y como una relación $y = f(x)$.

4) ¿Qué puede decirse acerca de una línea de corriente y una trayectoria que pasen por un mismo punto? Razonar la respuesta.

5) Obtener el campo de aceleraciones.



6) Comprobar el Teorema de Arrastre de Reynolds aplicado a la propiedad masa para el volumen de control de la figura. El volumen de control está quieto pero es deformable, ya que el lado CD se mueve verticalmente con velocidad v_0.

PROBLEMA 2

Considérese el depósito de la figura, de radio R_1, abierto a la atmósfera y lleno de un líquido hasta una altura H. El depósito se vacía a la atmósfera (punto 4) a través de una tubería de radio R_2 ($R_2 \ll R_1$) con un tramo horizontal (del punto 2 al 3) y un tramo inclinado de longitud L y altura h (del punto 3 al 4). Las pérdidas locales en la desembocadura del depósito (punto 2) se modelizan por:

$h_{emb} = k\dfrac{v_2^2}{2g}$, siendo k una constante y v_2 la velocidad en la entrada de la tubería (punto 2).

El régimen de movimiento es laminar, pero desde el punto 2 al 3 el perfil de velocidades es uniforme debido a la influencia de la desembocadura , y se desprecian las pérdidas en dicho tramo horizontal. A partir del punto 3 y hasta el 4 se realiza la aproximación de flujo de Couette.

El fluido tiene un coeficiente de viscosidad μ y un peso específico γ.

Se pide:

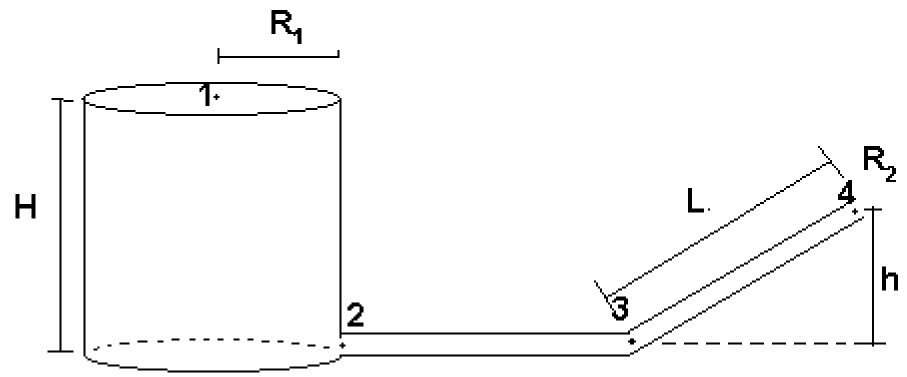
1) Coeficiente de velocidades (C_v) del depósito en función de k.

2) Caudal en función de v_2.

3) Perfil de velocidades entre los puntos 3 y 4 en función de μ, L, Cv, v_2, h, H y R_2.

4) A partir de la expresión anterior obtener el caudal e igualar con el resultado obtenido en el apartado 2, obteniendo una ecuación que permite obtener v_2.

5) Aplicar la ecuación de Bernouilli entre los puntos 1 y 4 comprobando la expresión del apartado anterior.


R1
1
H
2
3
L
4
R2
h

SOLUCIÓN PROBLEMA 1

1) Integramos la ecuación de continuidad en forma diferencial:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\vec{\nabla}\vec{v} = 0 \Rightarrow \rho(t) = \frac{\rho_0}{(t+1)^{3/2}}$$

2) Integramos la ecuación diferencial de las líneas de corriente:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \Rightarrow x = C_1 y^2$$

3) Integramos la ecuación diferencial de las trayectorias:

$$dx = u \cdot dt \Rightarrow x = x_0(t+1)$$

$$dy = v \cdot dt \Rightarrow y = y_0(t+1)^{1/2}$$

Despejando *(t + 1)* de la primera expresión y sustituyendo en la segunda obtenemos la relación entre y y x:

$$x = \frac{x_0}{y_0^2} y^2$$

4) Las líneas de corriente y trayectorias coinciden para un mismo punto de paso. Esto es así porque las líneas de corriente no dependen del tiempo. Explícitamente:

Para un campo de velocidades $\vec{v}(x,y,t) = u(x,y,t) \cdot \vec{i} + v(x,y,t) \cdot \vec{j}$ calculamos las líneas de corriente y las trayectorias:

– Líneas de corriente:

$$\frac{dx}{u(x,y,t)} = \frac{dy}{v(x,y,t)} \text{, con } t \text{ fijo} \qquad \text{(ec. 1)}$$

– Trayectorias:

Las ecuaciones diferenciales son $dx = u(x,y,t) \cdot dt$ y $dy = v(x,y,t) \cdot dt$, de aquí:

$$\frac{dx}{u(x,y,t)} = \frac{dy}{v(x,y,t)} = dt \text{, con } t \text{ variable} \qquad \text{(ec. 2)}$$

En la (ec. 1) el tiempo es fijo y en la (ec. 2) es variable, pero si en la (ec. 1) se cancela el tiempo, las líneas de corriente no dependen de *t*, ni tampoco aparecerá *t* en la primera igualdad de la (ec. 2) . Por tanto al integrar esas dos ecuaciones la expresión obtenida será la misma (es irrelevante que *t* permanezca fijo o no si no aparece en las expresiones).

5) Aplicamos la definición del campo de aceleraciones: $\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\vec{\nabla}\right)\vec{v}$ ➔ $\vec{a} = -\frac{y}{t+1} \cdot \vec{j}$

6) TAR para la propiedad masa ➔ ecuación de continuidad en forma integral:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho \cdot dV + \int \rho \vec{v}_{r,SC} \cdot d\vec{A} = 0$$

Tomamos la expresión de la densidad obtenida en el primer apartado y tenemos en cuenta que $\frac{\partial}{\partial t}\overline{BD} = v_0$

$$\int_{VC} \rho \cdot dV = \frac{\rho_0 b \overline{BD}}{(t+1)^{3/2}} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho \cdot dV = \rho_0 b \frac{\partial}{\partial t}\frac{\overline{BD}}{(t+1)^{3/2}} = \frac{\rho_0 b}{(t+1)^{3/2}}\left(v_0 - \frac{3h}{2(t+1)}\right)$$

$$\int_{SC} \rho \vec{v}_{r,SC} \cdot d\vec{A} = \int_{AB} \rho \vec{v}_{r,SC} \cdot d\vec{A} + \int_{BC} \rho \vec{v}_{r,SC} \cdot d\vec{A} + \int_{CD} \rho \vec{v}_{r,SC} \cdot d\vec{A} + \int_{DA} \rho \vec{v}_{r,SC} \cdot d\vec{A} =$$

$\frac{\rho_0 b}{(t+1)^{3/2}}\left(\frac{3h}{2(t+1)} - v_0\right)$ como se quería demostrar.

SOLUCIÓN PROBLEMA 2

1) Aplicamos la ecuación de Bernouilli entre 1 y 2:

$H = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + k\frac{v_2^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\left(\sqrt{1+k}\cdot v_2\right)^2}{2g}$, es decir, la velocidad teórica (si no existiera rozamiento) es $v_2(teo) = \sqrt{1+k}\cdot v_2$. Aplicando la definición de coeficiente de velocidades:

$$C_v = \frac{v_2}{v_2(teo)} = \frac{1}{\sqrt{1+k}}$$

Además podemos calcular el valor de la presión en el punto 2, que será necesaria para un cálculo posterior:

$$p_2 = \gamma H - \frac{\gamma}{C_v^2}\frac{v_2^2}{2g}$$

2) Aplicamos la definición de caudal como velocidad media por sección:

$$Q = \pi R_2^2 v_2$$

3) Al realizar la suposición de flujo de Couette entre los puntos 3 y 4 y teniendo en cuenta:

- $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p_4 - p_3}{L} = -\frac{p_3}{L} = -\frac{p_2}{L}$
- $\sin\theta = \frac{h}{L}$
- $u(0)$ tiene un valor finito
- $u(R_2) = 0$

se llega a:

$$u(r) = \frac{\gamma}{4\mu L}\left(\frac{1}{C_v^2}\frac{v_2^2}{2g} + h - H\right)\left(r^2 - R_2^2\right)$$

4) Integramos la expresión del apartado anterior a lo largo de una sección de tubería, obteniendo el caudal:

$$Q = \frac{\pi R_2^4 \gamma}{8\mu L}\left(H - h - \frac{1}{C_v^2}\frac{v_2^2}{2g}\right)$$

Igualando con el valor obtenido en el apartado 2 se llega a:

$$\frac{1}{2gC_v^2}v_2^2 + \frac{8\mu L}{\gamma R_2^2}v_2 + h - H = 0$$

5) Aplicamos la ecuación de Bernouilli entre 1 y 4:

$H = h + \frac{v_2^2}{2g} + k\frac{v_2^2}{2g} + f\frac{L}{2R_2}\frac{v_2^2}{2g}$, siendo f el factor de fricción que, en flujo de Couette, toma la forma $f = \frac{64}{\mathrm{Re}} = \frac{32\mu}{\rho v_2 R_2}$. Escribiendo $k = \frac{1}{C_v^2} - 1$ se llega a la expresión obtenida en el apartado anterior.

NOTA:

En el apartado 5 se aplica la ecuación de Bernouilli entre la parte superior del depósito (punto 1) y la salida de la tubería (punto 4). El término cinético en el punto 4 corresponde a $\frac{v_2^2}{2g}$, ya que $v_2 = v_4$ por ser constante la sección de la tubería. El perfil desde 3 hasta 4 se supone parabólico pero no hay que corregir el término cinético con el factor $\alpha = 2$ y poner el término cinético como $\alpha\frac{v_2^2}{2g}$. Si se hiciera este cambio significaría que en el punto 3 (paso de perfil uniforme a perfil parabólico) el flujo de energía cinética pasaría de $\frac{v_2^2}{2g}\gamma v_2 S$ a $\alpha\frac{v_2^2}{2g}\gamma v_2 S$ (siendo S la sección de la tubería) sin variar el resto de términos de energía, es decir, los debidos a presión y a cotas geométricas. Esto significaría que la energía del fluido aumentaría al pasar el mismo a través de la sección señalada con el punto 3. Por tanto el término cinético debe ser $\frac{v_2^2}{2g}$.

Esta inconsistencia se debe a dos suposiciones realizadas y que no son totalmente ciertas:

i) Paso brusco de un perfil uniforme (de 2 a 3) a otro parabólico (de 3 a 4).

ii) Flujo de Couette en todo el tramo 3 – 4 cuando los efectos de bordes (codo en 3 y salida en 4) rompen la simetría cilíndrica.

Fuente: enunciados correspondientes a exámenes de diferentes años de la Universidad Politécnica de Valencia.