MATEMÁTICAS
DIPLOMATURA EN ÓPTICA
EXAMEN FINAL

1ª PARTE

1. Encuentra una base del subespacio vectorial S de $\mathbb{R}^4$generado por los vectores (1,0,-1,2), (3,-2,5,1), (0,-1,1,2),(2,1,-9,11).Escribe sus ecuaciones paramétricas y cartesianas.

Averigua si el vector a=(2, -4,3,1) pertenece a dicho subespacio.

Solución:

1º.Buscamos una base de S

Una base de un subespacio vectorial es un conjunto de vectores que cumple:

- son sistema generador del subespacio
- son linealmente independientes (L.I)

En este caso, sabemos que el conjunto de vectores es sistema generador de S, solo falta comprobar si son L.I , para ello calculamos el rango de la matriz A formada por los vectores colocados por filas :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -9 & 11 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ F_2-3F_1 \\ \\ F_4-2F_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 8 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -7 & 7 \end{pmatrix} F_4 \longleftrightarrow F_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -7 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 8 & -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ F_3+F_2 \\ F_4+2F_2 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & 9 \\ 0 & 0 & -6 & 9 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ F_4-F_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{Rang (A)} = 3$$

$\Longrightarrow$ Hay 3 vectores L.I

Por tanto:

Base (S)=$\{(1,0,-1,2),(3,-2,5,1),(0,-1,1,2)\}$

2º. Ecuaciones paramétricas:

Sea (x,y,z,t)ϵS

(x,y,z,t) $= \alpha(1,0,-1,2) + \beta(3,-2,5,1) + \gamma(0,-1,1,2) =$

$(\alpha+3\beta,-2\beta-\gamma,-\alpha+5\beta+\gamma,2\alpha+\beta+2\gamma)$

x=$\alpha+3\beta$
y=$-2\beta-\gamma$
z=$-\alpha+5\beta+\gamma$
t=$2\alpha+\beta+2\gamma$

S=$\left\{(\alpha+3\beta,-2\beta-\gamma,-\alpha+5\beta+\gamma,2\alpha+\beta+2\gamma)\epsilon\mathbb{R}^4\ ;\ \alpha,\beta,\gamma\epsilon\mathbb{R}\right\}$

3º. Ecuaciones cartesianas:

Construimos una matriz colocando los vectores de la base por columnas y añadimos una última columna con x, y, z y t . Después triangularizamos dicha matriz

$$\begin{pmatrix}1&3&0&x\\0&-2&-1&y\\-1&5&1&z\\2&1&2&t\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ F_3+F_1\\ F_4-2F_1\end{matrix}\begin{pmatrix}1&3&0&x\\0&-2&-1&y\\0&8&1&z+x\\0&-5&2&t-2x\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \frac{2F_3+8F_2}{2}\\ 2F_4-5F_1\end{matrix}\begin{pmatrix}1&3&0&x\\0&-2&-1&y\\0&0&-3&x+4y+z\\0&0&9&-4x+5y+2t\end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix}\\ \\ \\ F_4+3F_1\end{matrix}\begin{pmatrix}1&3&0&x\\0&-2&-1&y\\0&0&-3&x+4y+z\\0&0&0&-x+17y+3z+2t\end{pmatrix}$$

Nos quedamos con las ecuaciones que aparezcan en filas donde todos los elementos sean ceros:

$0=-x+17y+3z+2t$

S=$\left\{(x,y,z,t)\epsilon\mathbb{R}^4\ ;\ -x+17y+3z+2t=0\ ,\ x,y,z,t\epsilon\mathbb{R}\right\}$

4º. Averiguamos si a=(2, -4,3,1) ϵ S, podemos hacerlo de dos formas:

-FORMA 1 :Si a ϵS será combinación lineal de los vectores de la base:

(2,-4,3,1) $=\alpha(1,0,-1,2)+\beta(3,-2,5,1)+\gamma(0,-1,1,2)$
$=(\alpha+3\beta,-2\beta-\gamma,-\alpha+5\beta+\gamma,2\alpha+\beta+2\gamma)$

$$\left\{\begin{matrix}\alpha+3\beta=2\\-2\beta-\gamma=-4\\-\alpha+5\beta+\gamma=3\\2\alpha+\beta+2\gamma=1\end{matrix}\right\}$$ Resolvemos el sistema por Gauss-Jordan:

$$\begin{pmatrix}1&3&0&2\\0&-2&-1&-4\\-1&5&1&3\\2&1&2&1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ F_3+F_1\\ F_4-2F_1\end{matrix}\begin{pmatrix}1&3&0&2\\0&-2&-1&-4\\0&8&1&5\\0&-5&2&-3\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \frac{2F_3+8F_2}{2}\\ 2F_4-5F_1\end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 0 & 2\\ 0 & -2 & -1 & -4\\ 0 & 0 & -3 & -11\\ 0 & 0 & 9 & -26\end{pmatrix} \quad F_4+3F_1 \quad \begin{pmatrix}1 & 3 & 0 & 2\\ 0 & -2 & -1 & -4\\ 0 & 0 & -3 & -11\\ 0 & 0 & 0 & -67\end{pmatrix}$$

Este es un sistema incompatible y por tanto no tiene solución. Entonces el vector a no es combinación lineal de los vectores de la base, luego a$\notin$S

-FORMA 2: Si a ϵ S cumplirá la ecuación cartesiana del subespacio:

$0 = -x+17y+3z+2t-2+17\cdot(-4)+3\cdot 3+2\cdot 1 = -2-68+9+2 = -59 \neq 0$

$\Longrightarrow$a$\notin$S

2. Discute el siguiente sistema de ecuaciones según los valores de a.

ax - y - z = 2
- x + ay - z = 2
x + y - az = 3a+1

Solución:

Construimos la matriz de los coeficientes ampliada (A|b) y triangularizamos para estudiar los rangos de (A) y (A|b)

$$\begin{pmatrix}a & -1 & -1 & 2\\ -1 & a & -1 & 2\\ 1 & 1 & -a & 3a+1\end{pmatrix} F_3 \longleftrightarrow F_1 \begin{pmatrix}1 & 1 & -a & 3a+1\\ a & -1 & -1 & 2\\ -1 & a & -1 & 2\end{pmatrix} \begin{matrix}F_2-aF_1\\ F_3+F_1\end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & -a & 3a+1\\ 0 & -(1+a) & -1+a^2 & -3a^2-a+2\\ 0 & 1+a & -(1+a) & 3a+3\end{pmatrix} \quad F_3+F_2 \quad \begin{pmatrix}1 & 1 & -a & 3a+1\\ 0 & -(1+a) & -1+a^2 & -3a^2-a+2\\ 0 & 0 & a^2-a-2 & -3a^2+2a+5\end{pmatrix}$$

-Si $a^2-a-2=0 \Longrightarrow a=2$ ó $a=-1$

-Si $a=2$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & -5\\ 0 & -3 & 3 & -12\\ 0 & 0 & 0 & -3\end{pmatrix} \Longrightarrow Rang(A)=2 \neq 3 = Rang(A \mid b)$$

$\Longrightarrow$ Sistema incompatible

-Si $a=-1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow Rang(A) = 1 = Rang(A \mid b) < n^{o} \; de \; incógnitas$$

$\Longrightarrow$ Sistema compatible indeterminado

-Si $a \neq 2$ y $a \neq -1$

$Rang(A) = 3 = Rang(A \mid b) \Longrightarrow$ Sistema compatible
$Rang(A) = 3 = n^{o}$ *de incógnitas* $\Longrightarrow$ determinado

3. Sea r_1 la recta intersección de los planos
$\pi_1 \equiv x + 2y - 2z = 5$ **y** $\pi_2 \equiv 5x - 2y - z = 0$.
a) Estudia si es paralela a la recta r_2 definida por
x=-3+2t
y=3t
z=1+4t
b) Encuentra las ecuaciones del plano que contiene a r_1 y r_2

Solución:
a) Para ver si son paralelas estudiaremos si son proporcionales los vectores de las dos rectas
1º.Calculamos el vector director de r_1 (v_1) :
$\pi_1 \equiv x + 2y - 2z = 5 \Longrightarrow w_1 = (1, 2, -2)$
$\pi_2 \equiv 5x - 2y - z = 0. \Longrightarrow w_2 = (5, -2, -1)$

sabemos que $w_1, w_2 \perp v_1$ por tanto, si $v_1 = (x, y, z)$:
0=<(x,y,z)(1,2,-2)>=x+2y-2z=0
0=<(x,y,z)(5,-2,-1)>=5x-2y-z=0
resolvemos este sistema y obtenemos:
x=1/2z
y=3/4z $\Longrightarrow$ damos, por ejemplo, el valor z=4$\Longrightarrow$
z=z

x=2
y=3
z=4

$\Longrightarrow v_1 = (2, 3, 4)$

2º.Calculamos el vector director de r_2 (v_2) :

como r_2 está expresada en ecuaciones continuas sabemos que su vector director corresponde a los coeficientes de la t
$v_2 = (2, 3, 4)$

3º.Comparamos v_1 y v_2
como $v_1 = v_2 \Longrightarrow$ las dos rectas son paralelas

b) Para construir el plano que contiene a las dos rectas necesitamos un punto y dos vectores L.I, usaremos
P=(-3,0,1) (lo obtenemos de las ecuaciones de r_2)
$v_1 = (2, 3, 4)$ (vector director de r_2)
por tanto necesitamos un vector director más.

Nuestras dos rectas son paralelas (podemos confirmar que no son la misma recta sustituyendo el punto P, que sabemos que pertenece a r_2, en las ecuaciones de r_1 y obsevando que ese punto no pertenece a r_1 porque no cumple las ecuaciones). Luego si calculamos un punto Q ϵ r_1, podremos obtener v_2 como el vector que va de P a Q.

1º.Resolvemos el sistema de ecuaciones que definen r_1 :
x=$\frac{5+3z}{6}$
y=$\frac{9z+25}{12}$ $\Longrightarrow$ damos, por ejemplo, el valor $z = 1 \Longrightarrow$
z=z

x=$\frac{4}{3}$
y=$\frac{17}{6}$
z=1

$\Longrightarrow$ Q=$(\frac{4}{3}, \frac{17}{6}, 1)\epsilon r_1$

2º.Calculamos el vector que va de P a Q:
v_2 = Q - P = $(\frac{4}{3}, \frac{17}{6}, 1)$-(-3,0,1) = $(\frac{-5}{3}, \frac{17}{6}, 0)$

Ya tenemos todos los elementos necesarios para calcular la ecuación del plano:

P=(-3,0,1)
$v_1 = (2, 3, 4)$
$v_2 =(\frac{-5}{3}, \frac{17}{6}, 0)$

$$\begin{vmatrix} x+3 & y & z-1 \\ 2 & 3 & 4 \\ \frac{-5}{3} & \frac{17}{6} & 0 \end{vmatrix} = \frac{17}{6}2(z-1) - \frac{5}{3}4y + \frac{5}{3}3(z-1) - \frac{17}{6}4(x+3) =$$

$$= \frac{32}{3}(z-1) - \frac{5}{3}4y - \frac{17}{6}4(x+3) =$$

$$= \frac{32}{3}z - \frac{32}{3} - \frac{20}{3}y - \frac{34}{3}x - 34 = 0$$

$\Longrightarrow -\frac{34}{3}x - \frac{20}{3}y + \frac{32}{3}z - \frac{134}{3} = 0$
$\Longrightarrow -34x - 20y + 32z = 134$

2ª PARTE

4. Hallar los elementos de la siguiente cónica:
$\mathbf{-18x + y^2 + 2y + 37 = 0}$

Solución:
Como solo la y está elevada al cuadrado sabemos que va a ser una parábola. Vamos a transformar la ecuación para llegar a la ecuación de la parábola :

-$18x + y^2 + 2y + 37 = 0$
-$18x + (y+1)^2 - 1 + 37 = 0$
-$18x + (y+1)^2 + 36 = 0$
$(y+1)^2 = 18x - 36$
$(y+1)^2 = 18(x-2)$
$(y+1)^2 = 2 \cdot 9(x-2)$

Comparamos con la ecuación de la parábola $(x - x_o) = 2c(y - y_0)^2$ y obtenemos:
$x_0 = 2$
$y_0 = -1$
c = 9
Por tanto tiene:

vértice v = (x_0, y_0) = (2,-1)
foco f = v + f' = (x_0, y_0) + $(\frac{c}{2}$,0) = (2,-1) + $(\frac{9}{2}$,0) = $(\frac{13}{2}, -1)$

El eje es la recta que pasa por el vértice y el foco:
eje : y=-1

La recta directriz se encuentra a la misma distancia del vértice que el foco y corta perpendicularmente al eje:

d(F,V) $= \frac{13}{2} - 2 = \frac{9}{2}$
recta directriz : x= $2 - \frac{9}{2} = -\frac{5}{2}$

5. Encontrar los posibles máximos, mínimos y puntos silla de la función:
f(x,y)= $3x^2 - 2xy - y^2 - 8y$

Solución:

1º. Calculamos las derivadas parciales, las igualamos a 0 y resolvemos el sistema de ecuaciones resultante:

$f_x = 6x - 2y = 0$

$f_y = -2x - 2y - 8 = 0$

(resolvemos) $\Longrightarrow x = -2 \quad y = -6$

Por tanto tenemos como punto crítico el P=(-2,-6)

2º. Calculamos la matriz Hessiana (que es la formada a partir de las derivadas parciales segundas)

$f_{xx} = 6$

$f_{xy} = f_{yx} = -2$

$f_{yy} = -2$

H(x,y)=$\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$

3º. Calculamos el determinante de la matriz Hessiana en el punto crítico:

$|H(2,6)| = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -12 - 4 = -16 < 0 \Longrightarrow P = (-2,-6)$ es un punto silla de la función

6. Calcula la integral de la función f(x,y) = x + y² en la región limitada por las rectas y=2 , x=0, y=x+1

Solución:

$$\int_0^1 \left(\int_{x+1}^2 x + y^2 \, dy \right) dx =$$
$$\int_0^1 \left(xy + \frac{y^3}{3} \right)_{x+1}^2 dx =$$
$$\int_0^1 \left(2x + \frac{2^3}{3} \right) - \left(x(x+1) + \frac{(x+1)^3}{3} \right) dx =$$
$$\int_0^1 2x + \frac{8}{3} - \left(x^2 + x + \frac{x^3+3x^2+3x+1}{3} \right) dx =$$
$$\int_0^1 2x + \frac{8}{3} - x^2 - x - \frac{x^3}{3} - x^2 - x - \frac{1}{3} dx =$$
$$\int_0^1 -\frac{x^3}{3} - 2x^2 + \frac{7}{3} dx =$$
$$\left(-\frac{x^4}{12} - 2\frac{x^3}{3} + \frac{7}{3}x \right)_0^1 =$$
$$-\frac{1^4}{12} - 2\frac{1^3}{3} + \frac{7}{3}1 =$$
$$-\frac{1}{12} - \frac{2}{3} + \frac{7}{3} =$$
$$-\frac{1}{12} - \frac{8}{12} + \frac{28}{12} = \frac{19}{12}$$

Fuente: enunciados correspondientes a exámenes de diferentes años de la Universidad de Valencia.