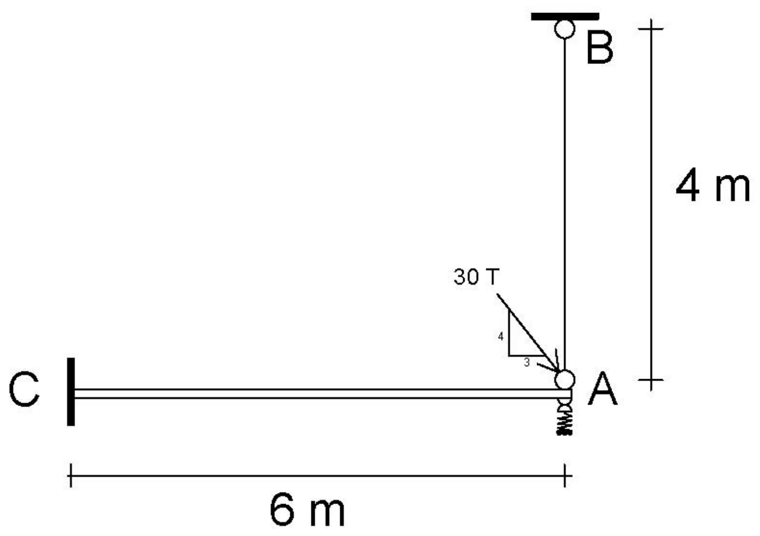
PROBLEMA

Para la estructura representada en la figura, supuesto un comportamiento elástico y lineal y depreciando la deformación por cortante, se pide:

Obtener el valor del desplazamiento vertical del nudo A mediante el principio de los desplazamientos virtuales.
Obtener el valor del giro del nudo A mediante el principio de las fuerzas virtuales (Método de reducción). Se podrá utilizar, si se considera oportuno, los resultados del apartado 1.



DATOS:

BARRA 1: IPE 300 $A=53.8\ cm^2$
$I=8360\ cm^4$

BARRA 2: cable 1Φ 16 mm

$E= 2.1\cdot10^6\ kg/cm^2$

$K_{muelle}= 500\ T/m$

dy_A por el PDV:

GIC = 3 movimientos independientes dx_A, dy_A, θ_A.
Estado real: funciones desplazamiento y deformación.

BARRA 1:

$u_1 = N_1^a (x)\, dx_{i1} + N_2^a (x)\, dx_{j1}$

$dx_{i1} = dx_C = 0$
$dx_{j1} = dx_A$

$u_1 = N_2^a (x)\, dx_A = (x/L)\, dx_A = (x/6)\, dx_A$

$u'_1 = 1/6\, dx_A$

$v_1 (x) = N_1^f (x)\, dy_{i1} + N_2^f (x)\, \theta_{i1} + N_3^f (x)\, dy_{j1} + N_4^f (x)\, \theta_{j1}$

$dy_{i1} = dy_C = 0 \qquad \theta_{i1} = \theta_C = 0$
$dy_{j1} = dy_A \qquad \theta_{j1} = \theta_A$

$v_1 (x) = N_3^f (x)\, dy_A + N_4^f (x)\, \theta_A = (-2x^3/L^3 + 3x^2/L^2)\, dy_A + (x^3/L^2 – x^2/L)\, \theta_A$

$v''_1 (x) = (-12x/6^3 + 6/6^2)\, dy_A + (6x/6^2 – 2/6)\, \theta_A$

BARRA 2:

$u_2 = N_1^a (x)\, dx_{i2} + N_2^a (x)\, dx_{j2}$

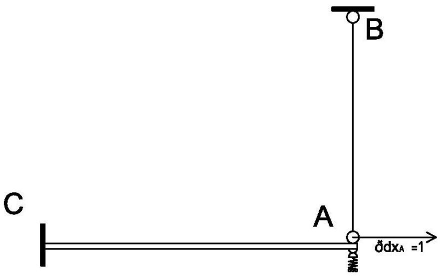
$dx_{i2} = dy_A$
$dx_{j2} = dy_B$

$u_2 = N_1^a (x)\, dy_A = (1-x/L)\, dy_A = (1-x/4)\, dy_A$

$u'_2 = -\, 1/4\, dy_A$

Estado virtual: funciones desplazamiento y deformación.

Estado virtual **I**:

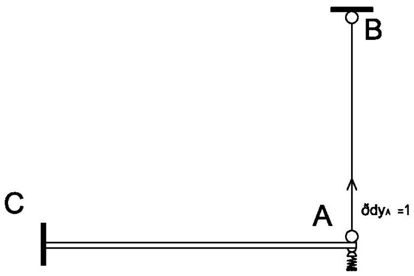


$\delta dy_A = 0$
$\delta\theta_A = 0$

Barra 1:

$\delta u_1^{I}(x) = x/L$
$\delta u'^{I}_1(x) = 1/6$

Estado virtual **II**:



$\delta dx_A = 0$
$\delta\theta_A = 0$

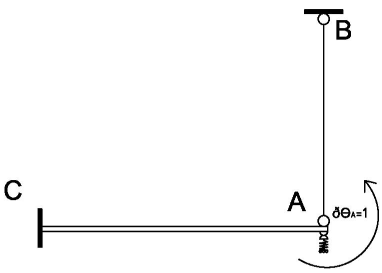
Barra 1:

$\delta v_1^{II}(x) = (-2x^3/L^3 + 3x^2/L^2)$
$\delta v''^{II}_1(x) = (-12x/L^3 + 6/L^2)$

Barra 2:

$\delta u_2^{I}(x) = (1-x/L)$
$\delta u'^{I}_2(x) = -1/4$

Estado virtual **III**:



$\delta dx_A = 0$
$\delta dy_A = 0$

Barra 1:

$\delta v_1^{III}(x) = (x^3/L^2 - x^2/L)$
$\delta v''^{III}_1(x) = (6x/L^2 - 2/L)$

Ecuaciones de Balance Energético:

Estado virtual I:

$\delta W^{I} = \delta U^{I}$
$\delta W^{I} = 18\ \delta dx_A = 18$
$\delta U^{I} = \int EA_1 u'_1(x) \delta u'^{I}_1\ dx = \int 2'1\cdot10^7\cdot53'8\cdot10^{-4}\cdot1/6\ dx_A\cdot1/6\ dx = 18830\ dx_A$

$18830\ dx_A = 18$

$dx_A = 9'559 \cdot 10^{-4}$ m

Estado virtual II:

$\delta W^{II} = \delta U^{II}$
$\delta W^{II} = -24\ \delta dy_A = -24$
$\delta U^{II} = \int EI_1 v''_1(x) \delta v''^{II}_1(x)\ dx + \int EA_2 u'_2(x) \delta u'^{II}_2(x)\ dx = \int EI_1\cdot[(-12x/6^3 + 6/6^2)\ dy_A + + (6x/6^2 - 2/6)\ \theta_A]\cdot[(-12x/6^3 + 6/6^2)]\ dx + \int EA_2(-1/4)\ dy_A\ (-1/4)\ dx$

Estado virtual III:

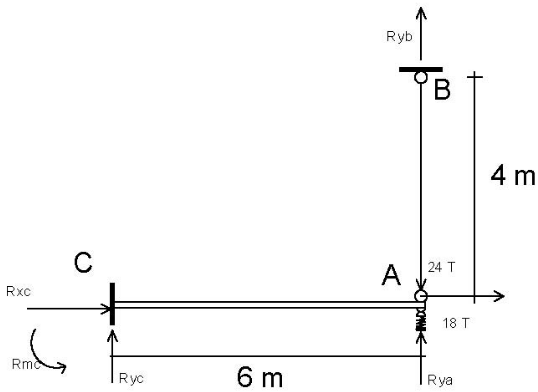
$\delta W^{III} = \delta U^{III}$
$\delta W^{III} = 0$
$\delta U^{III} = \int EI_1 v''_1(x) \delta v''^{III}_1(x)\ dx =$
$= \int EI_1\cdot[(-12x/6^3 + 6/6^2)\ dy_A + (6x/6^2 - 2/6)\ \theta_A]\cdot[(-6x/6^2 - 2/6)]\ dx$

$dya = -1'519 \cdot 10^{-2}$ m

$\theta_A = -3'797 \cdot 10^{-3}$ m

Obtener el θ_A por el PFV-Método de reducción

A partir de los movimientos obtenidos en el apartado 1 se obtienen las reacciones con el fin de definir estáticamente la estructura.



$Ry_A = -500\ dy_A = 7'595$ T

$E \cdot A_2 \cdot u'_2 = N_2$

$4222'3 \cdot (dy_A/4) = N_2 = Ry_B$

$Ry_B = 16'034$ T $= N_2$

$\Sigma F_x = 0$; $Ry_C + 18 = 0$; $Rx_C = -18$ T

$\Sigma F_y = 0$; $Ry_A + Ry_B + Ry_C = 24$; $Ry_C = 0'371$ T

$\Sigma M = 0$; $R_{MC} = 2'226$ T·m

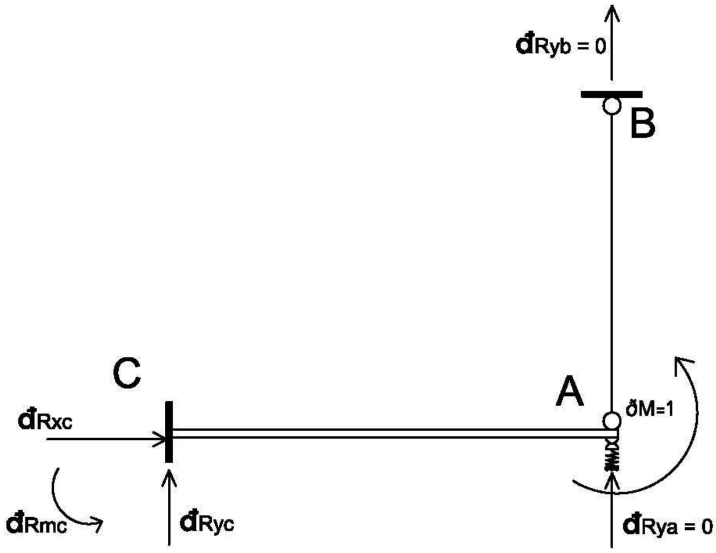
Leyes de esfuerzos:

$N_1 = 18$

$M_1\ (x) = 0'371x - 2'226$

$N_2 = 16'034$

Sistema virtual:



GIE = 2

$\sigma Ry_B = 0$

$\sigma Ry_A = 0$

$\Sigma Fx = 0$; $\sigma Rx_C = 0$

$\Sigma Fy = 0$; $\sigma Ry_C = 0$

$\Sigma M = 0$; $\sigma R_{MC} = -1$ T·m

Leyes de esfuerzos:

$\sigma N_1 = 0$

$\sigma M_1 = 1$

$\sigma N_2 = 0$

$\sigma W^* = \sigma U^*$

$\sigma W^* = 1 \cdot \theta_A = \theta_A$

$\sigma U^* = \sigma U^*_{flexion1} = \int M_{1\,(x)} \cdot \sigma M_1 / EI_1 \, dx$

$\theta_A = \int (0'371x - 2'226) \cdot 1/1755'6 \, dx =$ <u>$-3'79 \cdot 10^{-3}$ rad (sentido horario)</u>

Fuente: enunciados correspondientes a exámenes de diferentes años de la Universidad Politécnica de Valencia.