EXAMEN DE ECONOMETRIA EMPRESARIAL I – Parte I

1) a -Indique razonadamente las hipótesis sobre el término de perturbación en el modelo lineal básico.

b – Suponiendo las hipótesis básicas del apartado a, ¿los residuos mínimo cuadráticos serán homoscedasticos y no autocorrelacionados?

c – Deducir la matriz de varianzas – covarianzas del vector de estimadores MCO $(\hat{\beta})$, suponiendo que $E(uu') = \sigma^2\Omega$

Solución:

a) - La esperanza matemática del vector de perturbaciones aleatorias u_t es cero:

$$E(u_t) = 0 \qquad t = 1,2,.....T$$

- Las perturbaciones aleatorias son homoscedásticas:

$$E(u_t^2) = \sigma^2 \qquad t = 1,2,.....T \qquad \text{ó} \qquad E(uu') = \sigma^2$$

- Las perturbaciones aleatorias (u_t) con distinto subíndice son independientes entre sí (no autocorrelación):

$$E(u_t u_s) = 0 \qquad t \neq s$$

- El vector de perturbaciones aleatorias (u) tiene distribución normal multivariante, de media cero y matriz de covarianzas escalar.

$$U \approx N(0, \text{cov } escalar)$$

b) No. Los residuos son heteroscedasicos y autocorrelacionados aunque se cumplan las hipótesis básicas

$$\hat{u} = y - \hat{y}$$
$$\hat{u} = y - X\hat{\beta}$$
$$\hat{u} = (X\beta + u) - X(X'X)^{-1}X'y$$

$$\hat{u} = (X\beta + u) - X(X'X)^{-1}X'y$$
$$\hat{u} = (X\beta + u) - X(X'X)^{-1}X'(X\beta + u)$$
$$\hat{u} = X\beta + u - X(X'X)^{-1}X'X\beta - X(X'X)^{-1}X'u$$
$$\hat{u} = X\beta + u - X\ I\ \beta - X(X'X)^{-1}X'u$$
$$\hat{u} = X\beta + u - X\beta - X(X'X)^{-1}X'u$$
$$\hat{u} = (I - X(X'X)^{-1}X')u$$
$$\boxed{\hat{u} = Mu}$$

De ese resultado podemos derivar la distribución de los residuos. Si $\hat{u} = Mu$ entonces:

1) $E(\hat{u}) = E(Mu) = ME(u) = 0$

2) $Var(\hat{u}) = E[(\hat{u} - E(\hat{u}))(\hat{u} - E(u))']$

$$Var(\hat{u}) = E(\hat{u}\hat{u}') = E(Muu'M) = ME(uu')M = M\sigma^2 IM = \sigma^2 M$$

o sea $\rightarrow$ $\hat{u} \rightarrow N(0, \sigma^2 M)$

c) $E(uu') = \sigma^2\Omega$ y $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$

$$E[(\hat{\beta} - E(\beta))(\hat{\beta} - E(\beta)'] =$$
$$E[(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)'] =$$
$$E(X\beta + u) - X(X'X)^{-1}X'(X\beta + u) =$$
$$E(X'X)^{-1}X'uu'X(X'X)^{-1} =$$
$$(X'X)^{-1}X'E(uu')X(X'X)^{-1}$$
$$\boxed{\sigma^2(X'X)^{-1}X'\Omega X(X'X)^{-1} \succ \sigma^2(X'X)^{-1}}$$

Por lo que no es óptimo, no tiene la minima varianza.

Aunque si será insesgado:

$$E(\hat{\beta}) = E(X'X)^{-1}X'Y)$$
$$E(\hat{\beta}) = E[(X'X)^{-1}X'.(X\beta + u)]$$

aplico propiedad distributiva

$$E(\hat{\beta}) = E[(X'X)^{-1}X'X\beta) + ((X'X)^{-1}X'u)]$$
$$E(\hat{\beta}) = E[(I\beta) + (XX)^{-1}X'u)]$$
$$E(\hat{\beta}) = \beta + (X'X)^{-1}X'.0$$
$$E(\hat{\beta}) = \beta + 0$$
$$\boxed{E(\hat{\beta}) = \beta}$$

Po lo que, cuando $E(uu') = \sigma^2\Omega$, los estimadores mínimo cuadráticos son ELI pero no Óptimos.

2) Se ha estimado el siguiente modelo de demanda de viviendas con observaciones correspondientes al periodo 1970-2004:

$$\ln\hat{V}_i = -0.39 + 0.31\ln R_i - 0.67\ln P_i + 0.70\ln V_{t-1}$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1} = 0.05 \qquad \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_2} = 0.02 \qquad \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_3} = 0.04$$

$$R^2 = 0.999 \qquad DW = 0.52$$

donde:

V es el gasto en vivienda, R la renta disponible, P es el precio de la vivienda.

Además se dispone de la siguiente información:

$$\ln R_{2005} = 10.2 \qquad \ln P_{2005} = 2.7 \qquad \ln V_{2004} = 5{,}8$$

a) Contrastar detalladamente la existencia de autocorrelación.
b) Obtener el valor del predictor puntual y el intervalo de predicción en 2005, sabiendo que la desviación típica del error de predicción es 0,45.

Solución:

a) $H_0)\ \rho = 0$

$H_1)\ \rho \neq 0 \qquad\qquad \mu_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$

$$\hat{\rho} = 1 - \frac{DW}{2} = 1 - \frac{0.52}{2} = 0.74$$

$$h = \hat{\rho}\sqrt{\frac{T}{1 - T \times \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_3}}} = 0.74\sqrt{\frac{35}{1 - 35 \times 0.04^2}} = 4.5058$$

$h \succ 1.96 \rightarrow R\,H_0$ Existe autocorrelación.

b) $\ln \hat{V}_i = -0.39 + 0.31 \ln R_i - 0.67 \ln P_i + 0.70 \ln V_{t-1}$

$$\ln \hat{V}_{2005} = -0.39 + 0.31 \times 10.2 - 0.67 \times 2.7 + 0.70 \times 5.8$$

$$\ln \hat{V}_{2005} = 5.023$$

Para el intervalo

$$\ln \hat{V}_{2005} = 5.023 \pm t_{T-K}^{\alpha/2} \times 0.45$$

$$\ln \hat{V}_{2005} = 5.023 \pm t_{35-4}^{0.025} \times 0.45$$

$$\ln \hat{V}_{2005} = 5.023 \pm 2.021 \times 0.45$$

$$[4.11355\ ;\ 5.93245]$$

3) Se ha estimado la siguiente función de ventas de cafeteras de una determinada marca, con una muestra de 45 observaciones:

$$\ln \hat{V}_i = 220 - 6.3 \ln P_i + 3.1 \ln G_i$$

$\hat{u}'\hat{u} = 1805 \qquad R^2 = 0.93 \qquad \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1} = 3.2 \qquad \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_2} = 0.1$

donde:

V son las ventas, P los precios de las cafeteras, G los gastos en publicidad.

a) ¿El modelo es conjuntamente significativo?
b) Contraste la hipótesis de que la elasticidad de las ventas respecto del precio es menor que 1.
c) ¿Podemos admitir la hipótesis de que los gastos en publicidad tengan una influencia positiva sobre las ventas?

Solución:

a) $H_0 : \beta_2 = \beta_3 = 0$

$H_1 : \textit{No todos los } \beta \textit{ son ceros}$

$$F = \frac{R^2/(k-1)}{(1-R^2)/(T-k)} = \frac{0.93/(2)}{(1-0.93)/(45-3)} = 279 \qquad F_{2,42}^{0.05} = 3.23$$

$$F_0 \succ F_t \rightarrow R\,H_0$$

Los parámetros son conjuntamente significativos.

b) $H_0)\ \beta_1 = 1$

$H_1)\ \beta_1 \prec 1$

$$t = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1^*}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}} = \frac{-6.3-1}{3.2} = -2.28125 \qquad t_{42}^{0.05} \cong 1.684$$

$$|t_o| \succ t_t \rightarrow R\,H_0$$

La elasticidad de las ventas respecto al precio es menor que 1.

c) $H_0)\ \beta_2 = 0$

$H_1)\ \beta_2 \succ 0$

$$t = \frac{\hat{\beta}_2 - \beta_2^*}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_2}} = \frac{3.1 - 0}{0.1} = 31 \qquad t_{42}^{0.05} \cong 1.684$$

$$|t_o| \succ t_t \to R H_0$$

Es admisible la hipótesis de que los gastos en publicidad tengan una influencia positiva sobre las ventas.

4) Con una muestra de 30 familias se ha estimado la función de consumo:

$$\hat{C}_i = 0.847 + 0.989 R_i$$

$$\hat{u}'\hat{u} = 31.085 \qquad \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1} = 0.025$$

Una vez ordenadas las observaciones sobre las familias de acuerdo con su renta de menor a mayor, se ha dividido en dos grupos de 12 observaciones cada uno, obteniéndose los siguientes resultados:

$$Grupo\ 1: \hat{C}_i = 1.063 + 0.867 R_i \qquad \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1} = 0.039 \qquad \hat{\sigma}^2 = 0.547$$

$$Grupo\ 2: \hat{C}_i = 3.268 + 0.826 R_i \qquad \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1} = 0.093 \qquad \hat{\sigma}^2 = 3.123$$

a) Calcule la estimación insesgada de $\hat{\sigma}^2$ en el modelo de consumo con la muestra de 30 familias.
b) Contraste si existe heteroscedasticidad en este caso, indicando la hipótesis nula, la alternativa y el estadístico utilizado en el contraste.

Solución:

a) $\sigma^2 = \dfrac{\hat{u}'\hat{u}}{T-K} = \dfrac{31.085}{30-2} = 1.110$

b) $H_0)\ Homoscedasticidad$
$H_1)\ Heteroscedasticidad$

$$\hat{u}'\hat{u}_1 = \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1} \times (T-K) = 0.547 \times (12-2) = 5.47$$

$$\hat{u}'\hat{u}_2 = \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_2} \times (T-K) = 3.123 \times (12-2) = 31.23$$

$$F = \frac{\hat{u}'\hat{u}_2 /(T_2 - K)}{\hat{u}'\hat{u}_1 /(T_1 - K)} = \frac{31.43/(12-2)}{5.47(12-2)} = 5.9639$$

$$F_{10,10}^{0.05} = 2.98$$

$$F_0 \succ F_t \rightarrow R\,H_0$$

El modelo no es homoscedastico

Fuente: enunciados correspondientes a exámenes de diferentes años de la Universidad de Valencia.