EXAMEN DE MATEMÁTICAS ECONÓMICO-EMPRESARIALES ADE /ECO /ADE-DER

1. Dada la función $f(x,y)=\begin{cases} x^2+y^2 & si \quad x\leq y \\ -x^2+y^2 & si \quad x\succ y \end{cases}$ estudia la continuidad en los puntos (1,1) y (2,1).

2. Dadas las funciones $f(x,y)=\sqrt{xy^3}$ y $g(x,y)=\dfrac{e^x}{\ln y}$ calcula :

a) Las derivadas parciales de $f(x,y)$.
b) La expresión de la diferencial de $g(x,y)$ en el punto (0,e) .

3. Una empresa estima que sus beneficios vienen dados por la función $B(t,p)=\dfrac{40-2t}{5p^2-25}$, donde t es el tiempo y p es el IPC. El tiempo actual es t =1 y el IPC es p =3. No hay ninguna previsión fiable de la evolución del IPC pero la empresa estima que en la actualidad $\left.\dfrac{dp}{dt}\right|_1=0.2$.

Calcula $\left.\dfrac{\partial B(t,p)}{\partial t}\right|_{(1,3)}$ y $\left.\dfrac{dB(t)}{dt}\right|_1$. Interpreta estas derivadas explicando la diferencia entre ambas.
Según estas estimaciones, ¿los beneficios de la empresa va a aumentar o a disminuir a corto plazo?

4. Dada $z=uv+v^2$ donde $u=x\cos(y)$ y $v=xe^{xy}$, calcula $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ usando la regla de la cadena.

5. Sea $Q(K,L)=4K^{\alpha}L^{1-2\alpha}$. Clasifica los rendimientos a escala en función del parámetro α .

6. Estudia la convexidad del conjunto $C=\left\{(x,y)\in\Re^2 / \quad y\leq -x^2+1, \quad x\geq 0\right\}$

7. Calcula

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-2x}}{1+e^{-2x}}dx \quad \text{y} \quad \int_0^1 \frac{1}{x}dx.$$

8. Resuelve la ecuación diferencial: $\dfrac{dy}{dx}=y^2\cos x, \quad y(0)=1.$

SOLUCIONES:

1. ***Dada la función*** $f(x,y)=\begin{cases} x^2+y^2 & si \quad x\le y \\ -x^2+y^2 & si \quad x\succ y \end{cases}$ ***estudia la continuidad en los puntos (1,1) y (2,1).***

Estudiamos la continuidad en (1,1), como es un punto frontera nos podemos acercar al punto por las dos regiones en las que de divide la función, por ello hacemos dos límites:

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(1,1)} f(x,y)=\begin{cases} \lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(1,1)} x^2+y^2=2 \\ \\ \lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(1,1)} -x^2+y^2=0 \end{cases}$$ como los límites no son iguales, no existe limite en (1,1), entonces la función ya no es continua en (1,1).

En el punto (2,1) al no ser frontera estaríamos en la región $x\succ y$ luego la función será $f(x,y)=-x^2+y^2$, veamos la continuidad:

1.- $\exists f(2,1)=-4+1=-3$

2.- $\exists \lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(2,1)} -x^2+y^2=-3$

3.- $f(2,1)=-3=\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(2,1)} -x^2+y^2$

Luego la función es continua en (2,1).

2. ***Dadas las funciones*** $f(x,y)=\sqrt{xy^3}$ ***y*** $g(x,y)=\dfrac{e^x}{\ln y}$ ***calcula :***
   a) Las derivadas parciales de $f(x,y)$ ***.***
   b) La expresión de la diferencial de $g(x,y)$ ***en el punto (0,e) .***

a) La función se puede escribir: $f(x,y)=\left(xy^3\right)^{\frac{1}{2}}$

Entonces $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{1}{2}(xy^3)^{\frac{-1}{2}}.y^3$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\dfrac{1}{2}(xy^3)^{\frac{-1}{2}}.3xy^2$

b) La expresión de la diferencial es la siguiente:

$dg(a,b)(dx,dy)=\dfrac{\partial g}{\partial x}(a,b).dx+\dfrac{\partial g}{\partial y}(a,b).dy$, calculamos las derivadas de parciales y sustituimos en el punto (0,e).

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=\frac{e^x}{\ln y}\Rightarrow\frac{\partial g}{\partial x}(0,e)=\frac{e^0}{\ln e}=\frac{1}{1}=1$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=\frac{-e^x.\frac{1}{y}}{(\ln y)^2}\Rightarrow\frac{\partial g}{\partial y}(0,e)=\frac{-e^0.\frac{1}{e}}{(\ln e)^2}=\frac{-\frac{1}{e}}{1^2}=-\frac{1}{e}$$

Sustituyendo en la expresión de la diferencial tenemos:

$$dg(0,e)(dx,dy)=\frac{\partial g}{\partial x}(0,e).dx+\frac{\partial g}{\partial y}(0,e).dy=1.dx-\frac{1}{e}.dy$$

3. Una empresa estima que sus beneficios vienen dados por la función $B(t,p)=\dfrac{40-2t}{5p^2-25}$, donde t es el tiempo y p es el IPC. El tiempo actual es t =1 y el IPC es p =3. No hay ninguna previsión fiable de la evolución del IPC pero la empresa estima que en la actualidad $\left.\dfrac{dp}{dt}\right|_1=0.2$.

Calcula $\left.\dfrac{\partial B(t,p)}{\partial t}\right|_{(1,3)}$ y $\left.\dfrac{dB(t)}{dt}\right|_1$. Interpreta estas derivadas explicando la diferencia entre ambas.
Según estas estimaciones, ¿los beneficios de la empresa va a aumentar o a disminuir a corto plazo?

Calculamos $\dfrac{\partial B}{\partial t}(t,p)=\dfrac{-2}{5p^2-25}$ y ahora $\left.\dfrac{\partial B(t,p)}{\partial t}\right|_{(1,3)}=\dfrac{-2}{20}=-0.1$

Calculamos $\dfrac{dB(t)}{dt}$ mediante la regla de la cadena ya que tenemos el siguiente esquema:

$$B\begin{cases} t\cdots t \\ p\cdots t\end{cases}\qquad \frac{dB(t)}{dt}=\frac{\partial B}{\partial t}.\frac{dt}{dt}+\frac{\partial B}{\partial p}.\frac{dp}{dt}=\frac{-2}{5p^2-25}.1+\frac{-(40-2t).10p}{(5p^2-25)^2}.\frac{dp}{dt}.$$

Ahora nos falta sustituirla en el punto:

$$\left.\frac{dB(t)}{dt}\right|_1 = \left.\frac{\partial B}{\partial t}\right|_{(1,3)} \cdot \left.\frac{dt}{dt}\right|_1 + \left.\frac{\partial B}{\partial p}\right|_{(1,3)} \cdot \left.\frac{dp}{dt}\right|_1 = (-0.1).1 + \frac{-(40-2).30}{20^2}.(0.2) =$$

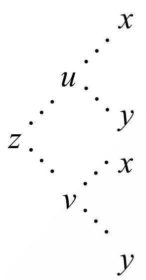
$$= -0.1 - 0.57 = -0.67$$

La diferencia entre estas dos derivadas es que la primera mide el cambio en los beneficios cuando pasa un año, suponiendo constante el IPC. La segunda mide el cambio en el beneficio pero suponiendo que IPC y tiempo están relacionados, el IPC depende del tiempo.

Según las estimaciones hechas por la empresa los beneficios de la empresa disminuirán a corto plazo ya que el signo de $\left.\frac{dB(t)}{dt}\right|_1$ es negativo.

4. Dada $z = uv + v^2$ donde $u = x\cos(y)$ y $v = xe^{xy}$, calcula $\frac{\partial z}{\partial y}$ usando la regla de la cadena.

Hacemos el diagrama de cómo están relacionadas las variables:



La función compuesta depende de x e y, luego podemos calcular $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial y} = v.x.(-sen(y)) + (u+2v).x^2.e^{xy}$ sustituyendo lo que vale u y v en

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -x^2 e^{xy} sen(y) + x^3 e^{xy}\cos(y) \quad + 2x^3 e^{2xy}$$

5. Sea $Q(K,L) = 4K^{\alpha}L^{1-2\alpha}$. Clasifica los rendimientos a escala en función del parámetro α.

Para clasificar los rendimientos a escala hay que estudiar la homogeneidad de la función.

Para ello estudiamos $Q(\lambda K, \lambda L) = 4.(\lambda K)^{\alpha}.(\lambda L)^{1-2\alpha} = 4.\lambda^{\alpha}.K^{\alpha}.\lambda^{1-2\alpha}.L^{1-2\alpha} = 4.$
$\lambda^{\alpha+1-2\alpha}.K^{\alpha}.L^{1-2\alpha} = \lambda^{1-\alpha}.K^{\alpha}.L^{1-2\alpha}$

Si $1-\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 0$ Rendimientos a escala constantes.
Si $1-\alpha \succ 1 \Rightarrow \alpha \prec 0$ Rendimientos a escala crecientes.
Si $1-\alpha \prec 1 \Rightarrow \alpha \succ 0$ Rendimientos a escala decrecientes.

6. Estudia la convexidad del conjunto $C = \{(x,y) \in \Re^2 / \quad y \leq -x^2+1, \quad x \geq 0\}$

El conjunto C está formado por dos inecuaciones, la primera $x^2 + y \leq 1$ genera un conjunto de nivel inferior, veamos si la función $f(x,y) = x^2 + y$ es convexa.
Para ello construimos la matriz Hessiana:

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = 1$

$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ Calculamos el determinante para saber si es regular o singular:

$\det(Hf(x,y)) = 0$ luego la matriz es singular y debemos estudiar los menores principales.

Los de orden 1:
$\Delta_1 = 2$
$\Delta_2 = 0$

Los de orden 2:
$\Delta_{12} = \det(Hf(x,y)) = 0$

Luego la matriz es semidefinida positiva, ya que todos los menores principales son positivos o cero, entonces la función es convexa y el conjunto de nivel inferior es convexo.

La segunda inecuación es $x \geq 0$ que es un semiespacio y sabemos por teoría que es convexo.

Luego como intersección de convexos es convexo, podemos concluir que el conjunto C es convexo.

7. Calcula

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-2x}}{1+e^{-2x}}dx \quad \textbf{\textit{y}} \quad \int_0^1 \frac{1}{x}dx.$$

Veamos la primera $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-2x}}{1+e^{-2x}}dx$, podemos identificar que es una integral impropia de primera especie ya que uno de sus límites de integración es infinito.

Resolvámosla:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-2x}}{1+e^{-2x}}dx = \lim_{t\to+\infty} \int_0^t \frac{e^{-2x}}{1+e^{-2x}}dx = \lim_{t\to+\infty} \frac{-1}{2}\ln(1+e^{-2x}) \Big|_0^t =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{-1}{2}\left[\ln(1+e^{-2t}) - \ln(1+e^{-0})\right] = \frac{-1}{2}\left[\ln(1+e^{-\infty}) - \ln(1+1)\right] = \frac{1}{2}\ln(2)$$

ya que $e^{-\infty} = 0$ y $\ln(1) = 0$.

La segunda $\int_0^1 \frac{1}{x}dx$ es una integral impropia de segunda especie , ya que en 0 se anula el denominador.

$$\int_0^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{t\to 0+} \int_t^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{t\to 0+} \ln(x) \Big|_t^1 = \lim_{t\to 0+} (\ln(1) - \ln(t))\Big| = \infty$$ ya que $\ln(1) = 0$ y $\ln(0) = -\infty$.

8. Resuelve la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = y^2 \cos x, \qquad y(0) = 1.$$

La ecuación diferencial es de variables separables, pasamos todo lo que depende de y a un lado y al otro todo lo que depende de x:

$\frac{1}{y^2}dy = \cos x dx$ Ahora integramos por separado cada lado de la ecuación:

$$\int \frac{1}{y^2}dy = \int \cos x dx \Rightarrow \int y^{-2}dy = \int \cos x dx \Rightarrow \frac{y^{-1}}{-1} = senx + C \Rightarrow \frac{-1}{y} = senx + C$$

Imponemos la condición inicial y(0) =1 (si x =0 entonces y =1)

$\frac{-1}{1} = sen0 + C \Rightarrow C = -1$ ya que sen0 =0.

La solución de la ecuación diferencial es : $\frac{-1}{y} = senx - 1$

Fuente: enunciados correspondientes a exámenes de diferentes años de la Universidad de Valencia.