1. Una esfera de radio 2 y centrada en el origen se corta por un plano horizontal a una altura 1. Hallar el volumen de la parte de la esfera que se encuentra por encima de dicho plano.

la ecuación de la esfera es: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$; *y la ecuación del plano:* $z = 1$

por tanto la región pedida es $R = \{(x,y,z) \,:\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \,, z \in [1,2]\,\}$

hacemos el cambio a coordenadas cilíndricas: $\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\operatorname{sen} t \,, \\ z = z \end{cases}$

s la región queda así: $R' = \{(r,t,z) \colon r^2 + z^2 \leq 4 \,, z \in [1,2], t \in [0,2\pi] \}$

$$volumen\ de\ R = \iiint_R dxdydz = \iiint_{R'} rdtdrdz = \ldots$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_1^2\int_0^{\sqrt{4-z^2}} rdrdtdz = \int_0^{2\pi} dt \int_1^2\int_0^{\sqrt{4-z^2}} rdrdz$$

$$= [t]_0^{2\pi} \cdot \int_1^2 \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{\sqrt{4-z^2}} dz = \cdots$$

$$= 2\pi \cdot \int_1^2 \frac{4-z^2}{2} dz = 2\pi \cdot \frac{1}{2}\left[4z - \frac{z^3}{3}\right]_1^2 = 2\pi \cdot \frac{1}{2}\left[\left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(4 - \frac{1}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{5}{3}\pi \quad u.^2$$

2. Calcular $\oint_{\gamma} \vec{F}$, siendo $\vec{F}(x,y) = (\operatorname{sen}x \cdot \cos y, \cos x \cdot \operatorname{sen}y)$

y siendo γ una curva que une los puntos $(0,-\pi)$ y $\left(\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

veamos si $\vec{F}$ es un campo conservativo

$\frac{\partial F_1}{\partial y} = -\operatorname{sen}x \cdot \operatorname{sen}y$; $\frac{\partial F_2}{\partial x} = -\operatorname{sen}x \cdot \operatorname{sen}y$; *por tanto $\vec{F}$ es conservativo.*

calculemos la función potencial φ:

$$\varphi(x,y) = \int F_1\, dx = \int \operatorname{sen}x \cos y\, dx = -\cos x \cos y + C(y)$$

derivamos respecto de y e igualamos con F_2

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \cos x \operatorname{sen}y + C'(y) = \cos x \operatorname{sen}y = F_2 \to C'(y) = 0 \to C(y) = 0$$

por lo que, $\varphi(x,y) = -\cos x \cos y$

y finalmente:

$$\oint_{\gamma} \vec{F} = \varphi\left(\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) - \varphi(0,-\pi) = -\cos\frac{3\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} - (-\cos 0 \cos(-\pi)) = -1$$

3. Resuelve la ecuación diferencial: $y'' + 3y' - 10y = 5e^{3x}$

sujeta a las condiciones iniciales: $y(0) = y'(0) = 0$

1º resolvemos la ecuación homogénea: $y'' + 3y' - 10y = 0$

el polinomio característico es: $r^2 + 3r - 10 = 0 \rightarrow r_1 = -5\,;\ r_2 = 2$

por lo que $y_H = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{2x}$

2º buscamos la solución particular: $f(x) = 5e^{3x} \rightarrow y_P = ae^{3x}$

sustituyendo en la EDO inicial: $9ae^{3x} + 9ae^{3x} - 10ae^{3x} = 5e^{3x}$

cancelando los e^{3x}*, nos queda* $9a + 9a - 10a = 5 \rightarrow 8a = 5 \rightarrow a = \frac{5}{8}$

3º escribimos la solución general

$$y_G = y_H + y_P = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{2x} + \frac{5}{8} e^{3x}$$

4º sustituimos las condiciones iniciales

$$y(0) = 0 \rightarrow C_1 + C_2 + \frac{5}{8} = 0$$

$$y'(0) = 0 \rightarrow -5C_1 + 2C_2 + 3 \cdot \frac{5}{8} = 0$$

resolviendo el sistema de ecuaciones: $C_1 = \frac{5}{56}\ ;\ C_2 = -\frac{5}{7}$

la solución particular de la EDO sujeta a las condiciones dadas queda así:

$$y_P = \frac{5}{56} e^{-5x} - \frac{5}{7} e^{2x} + \frac{5}{8} e^{3x}$$

4. Integrar la ecuación $\quad y' + y\,\text{sen}x = \text{sen}\,2x$

1º *resolvemos la ecuación homogénea:* $y' + y\ senx = 0$

esta EDO es separable y como tal la resolvemos

$$\frac{dy}{dx} + y\ senx = 0 \to \frac{dy}{y} = -senx\ dx \to \int \frac{dy}{y} = \int -senx\ dx$$
$$\to \ln y = cosx + C \to ..$$

$$.. \to y = e^{cosx+C} \to y_H = e^{cosx} \cdot K$$

2º *sustituimos en la ecuación original, tomando K como función de x*

$$(x))' + (e^{cosx} \cdot K(x)) \cdot senx = sen2x \to \qquad \dots$$

$$\dots \to e^{cosx}(-senx) \cdot K(x) + e^{cosx} \cdot K'(x) + e^{cosx} \cdot K(x) \cdot senx = sen2x \to \cdots$$

$$\dots \to (simplificando) \quad e^{cosx} \cdot K'^{(x)} = sen2x \to K'(x) = e^{-cosx} \cdot sen2x$$

3º *integramos para calcular* $K(x)$ *y sustituimos en* y_H *para hallar la solución particular*

$$K(x) = \int e^{-cosx} \cdot sen2x dx = \int e^{-cosx} \cdot 2senxcosxdx = \dots$$

integramos por partes: $\boxed{\begin{array}{ll} u = 2cosx & du = -2senx \\ dv = e^{-cosx} senx & v = e^{-cosx} \end{array}}$

$$\dots = 2cosxe^{-cosx} - \int (-2senx)e^{-cosx} dx = 2cosxe^{-cosx} + 2e^{-cosx}$$

sustituimos $K(x)$ *en* $y_H = e^{cosx} \cdot K(x)$

por lo que, $\qquad y_p = e^{cosx}(2cosxe^{-cosx} + 2e^{-cosx}) = 2cosx + 2$

4º *hallamos la solución general:* $y_G = y_H + y_p$

$$y_G = e^{cosx} \cdot K + 2cosx + 2$$

Fuente: enunciados correspondientes a exámenes de diferentes años de la Universidad de Valencia.