EXAMEN FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS
INGENIERÍA TELEMÁTICA

PREGUNTA 1: Calcular las siguientes expresiones:

a) $\sqrt[3]{2+2i}$

b) $\sqrt[4]{i}$

c) $\left(\dfrac{2+i}{3-2i}\right)^2$

d) $\dfrac{5}{-3+4i}$

Solución:

a) z= 2+2i pasamos a forma polar:

| z | = $\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

α = argumento

$$2+2i=2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$

Cosα = $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Senα = $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Entonces α = $\dfrac{\pi}{4}$

Por tanto:

$$\sqrt[3]{2+2i} = 2\sqrt{2}^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}+i\,sen\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}\right) \text{ con k=0, 1, 2}$$

b) z = i pasamos a forma polar

| z | = $\sqrt{0^2+1^2}=\sqrt{1}=1$

α = argumento

$0+i=1(0+i)$

Cosα = 0

Senα = 1

Entonces α = $\dfrac{\pi}{2}$

Por tanto:

$$\sqrt[4]{i} = 1^{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{4}+i\,sen\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{4}\right) \text{ con k=0, 1, 2, 3}$$

c)

$$\left(\frac{2+i}{3-2i}\right)^2 =$$

$$=\frac{(2+i)^2}{(3-2i)^2}=\frac{4+i^2+4i}{9+(2i)^2-12i}=\frac{3+4i}{5-12i}=\frac{(3+4i)(5+12i)}{(5-12i)(5+12i)}=\frac{-33+56i}{25+144}=\frac{-33}{169}+\frac{56}{169}i$$

d)

$$\frac{5}{-3+4i}=\frac{5(-3-4i)}{(-3+4i)(-3-4i)}=\frac{-15-20i}{9+16}=\frac{-15-20i}{25}=\frac{-3}{5}-\frac{4}{5}i$$

PREGUNTA 2: Calcula el siguiente sistema de ecuaciones dependiendo del valor de los parámetros α, β:

x + 2y + z = 2
x + y + 2z = 3
x + 3y + αz = 1
x + 2y + z = β

Solución: Utilizaremos el método de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & \alpha & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \beta \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha-1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \beta-2 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta-2 \end{array}\right)$$

-Si α≠ 0 y β≠2 entonces tenemos un sistema incompatible.
-Si α= 0 y β≠2 entonces tenemos un sistema incompatible.
-Si β= 2 y α≠0 entonces tenemos un sistema compatible determinado

$$\alpha z = 0 \rightarrow z = 0$$
$$-y+0=1 \rightarrow y=-1$$
$$x+2(-1)+0=2 \rightarrow x=4$$

(x, y, z)=(4, -1, 0)

-Si β= 2 y α= 0 entonces tenemos un sistema compatible indeterminado

Sea z = σ

$$-y+\sigma=1 \rightarrow y=\sigma-1$$
$$x+2(\sigma-1)+\sigma=2 \rightarrow x=2-\sigma-2(\sigma-1)=-3\sigma+4$$

(x, y, z)= (-3σ+4, σ-1, σ)

PREGUNTA 3: Demuestra por inducción $n! > 2^n$ cuando $n>4$

Solucion:
Para n= 4 tenemos que $4!=24 > 2^4=16$, se cumple
Ahora supongamos que se cumple para n y veamos si es cierto para n+1

Sabemos que $n! > 2^n$ cuando $n>4$, veamos si $(n+1)! > 2^{n+1}$ cuando $n>4$
$(n+1)!= n!(n+1) > 2^n(n+1)$
por tanto tenemos que demostrar que $2^{n+1}<2^n(n+1)$

$2^{n+1}=2^n 2 < 2^n(n+1)$ donde el 2^n se simplifica y se nos queda la desigualdad de la siguiente forma:

$2<(n+1)$ que si se cumple porque $n>4$, por tanto ya lo tendríamos demostrado.

PREGUNTA 4: $\int \frac{\cos^3 x}{1-senx}dx$

Solucion:
$$\int \frac{\cos^3 x}{1-senx}dx = \int \frac{\cos x\left(1-sen^2 x\right)}{1-senx}dx =$$

Cambio de variable coseno impar, entonces senx=t
con cosx=$\sqrt{1-t^2}$
dx=$\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$
$$= \int \frac{\sqrt{1-t^2}\left(1-t^2\right)}{1-t}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{1-t^2}{1-t}dt = \int \frac{(1-t)(1+t)}{(1-t)}dt = \int (1+t)dt = t + \frac{t^2}{2} + C = senx + \frac{sen^2 x}{2} + C$$

PREGUNTA 5: Sea $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \rightarrow si(x,y) \neq (0,0) \\ 0 \rightarrow si(x,y) = (0,0) \end{cases}$

- **a)** Estudiar la continuidad en (0, 0)
- **b)** Estudia la existencia de derivadas direccionales en (0, 0)
- **c)** Calcular las derivadas parciales continuas en (0, 0)
- **d)** ¿Son las derivadas parciales continuas en (0, 0)?

Solucion:

a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

y=mx

LRx= $\lim_{x\to 0} \frac{xmx}{\sqrt{x^2+(mx)^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2m}{\sqrt{x^2(1+m^2)}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2m}{x\sqrt{(1+m^2)}} = \lim_{x\to 0} \frac{xm}{\sqrt{(1+m^2)}} = 0$

x=my

LRy= $\lim_{y\to 0} \frac{ymy}{\sqrt{(mx)^2+y^2}} = \lim_{y\to 0} \frac{y^2m}{\sqrt{y^2(1+m^2)}} = \lim_{y\to 0} \frac{y^2m}{y\sqrt{(1+m^2)}} = \lim_{y\to 0} \frac{ym}{\sqrt{(1+m^2)}} = 0$

0 es candidato a limite

$\left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 \right| = \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| = \frac{|x||y|}{\sqrt{x^2+y^2}} < \frac{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2}$

$|x| = \sqrt{x^2} \le \sqrt{x^2+y^2}$

$|y| = \sqrt{y^2} \le \sqrt{x^2+y^2}$

Por tanto $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2} = 0$, entonces la función es continua en (0, 0)

b)
Sea (u,v) tal que $u^2+v^2=1$

$$D_{(u,v)}f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+hu,0+hv)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(hu,hv)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{huhv}{\sqrt{(hu)^2+(hv)^2}}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^2uv}{h\sqrt{h^2(u^2+v^2)}} = \frac{uv}{\sqrt{u^2+v^2}}$$

c) En (0, 0)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = D_{(1,0)}f(0,0) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = D_{(0,1)}f(0,0) = 0$$

En (x, y) ≠(0, 0)

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{y\sqrt{x^2+y^2}-xy\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}=\frac{2yx^2+2y^3-2x^2y}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}}=\frac{2y^3}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{x\sqrt{x^2+y^2}-xy\dfrac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}=\frac{2x^3+2xy^2-2y^2x}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}}=\frac{2x^3}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}}$$

d)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2y^3}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}}$$

y=mx

LRx= $\lim_{x\to 0}\dfrac{2(mx)^3}{\sqrt{(x^2+(mx)^2)^3}}=\lim_{x\to 0}\dfrac{2x^3m^3}{\sqrt{x^6(1+m^2)^3}}=\lim_{x\to 0}\dfrac{2x^3m^3}{x^3\sqrt{\left(1+m^2\right)^3}}=\dfrac{2m^3}{\sqrt{\left(1+m^2\right)^3}}$

No existe el límite porque depende de m, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ no es continua en (0, 0)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2x^3}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}}$$

x=my

LRy= $\lim_{x\to 0}\dfrac{2(my)^3}{\sqrt{((my)^2+y^2)^3}}=\lim_{x\to 0}\dfrac{2y^3m^3}{\sqrt{y^6(1+m^2)^3}}=\lim_{x\to 0}\dfrac{2y^3m^3}{y^3\sqrt{\left(1+m^2\right)^3}}=\dfrac{2m^3}{\sqrt{\left(1+m^2\right)^3}}$

No existe el límite porque depende de m, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ no es continua en (0,0)

Fuente: enunciados correspondientes a exámenes de diferentes años de la Universidad de Valencia.