MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN BIOLOGÍA

Ejercicio 1 Resolver la ecuación diferencial de segundo grado:

$$2x''(t)+2x'(t)-3x=e^{\frac{3t}{2}}$$

Ejercicio 2 Una población de zorros y otra de conejos conviven en un territorio de manera que la velocidad de crecimiento de la población de conejos es proporcional al número de individuos, con constante de proporcionalidad 5, menos una cantidad fija de 10 individuos que son cazados, y la variación de la población de zorros es de 3 veces la población de conejos mas dos veces la de zorros. Plantea y resuelve el sistema de ecuaciones diferenciales sabiendo que hay una cantidad inicial de 1000 conejos y de 100 zorros.

Ejercicio 3 Una colonia de champiñones parte de 1000 individuos. Se reproduce de tal manera que la población en cada año es doble que la del año pasado más cuarenta y cinco cuartos de la de hace dos años. Además cada año extraen 20 individuos para su estudio.

¿Cuál es la población de la colonia cada año? ¿cuántos individuos hay tras cinco años?

Ejercicio1 Se trata de una ecuación diferencial de grado 2 no homogénea. Para resolverla, nos planteamos primero la homogénea asociada:

2x´´(t)+2x´(t)-3x=0

La ecuación característica es:

$$2\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

Resolvemos esta ecuación de 2ª grado y obtenemos los valores:

$$\lambda = \frac{3}{2} \text{ y } \lambda = -1$$

Por tanto la solución general de la homogénea es:

$$x(t) = k_1 e^{\frac{3t}{2}} + k_2 e^{-t}$$

Si llamamos $g_1(t) = e^{\frac{3t}{2}}$ y $g_2(t) = e^{-t}$, sabemos que la solución general de la ecuación completa es:

$$x(t) = k_1(t) e^{\frac{3t}{2}} + k_2(t) e^{-t}$$

donde las funciones $k_1(t)$ y $k_2(t)$ cumplen:

$$k_1'(t) = \frac{-g_2(t) f(t)}{a(g_1(t)g_2'(t) - g_2(t)g_1'(t))}$$

$$k_2'(t) = \frac{g_1(t) f(t)}{a(g_1(t)g_2'(t) - g_2(t)g_1'(t))}$$

Por tanto, y considerando como f(t) la función que hace la ecuación diferencial no homogénea, tenemos:

$$k_1'(t) = \frac{-e^{-t} e^{\frac{3t}{2}}}{2(e^{\frac{3t}{2}}(-e^{-t}) - e^{-t}.\frac{3}{2} e^{\frac{3t}{2}})} = \frac{-e^{\frac{t}{2}}}{2(-e^{\frac{t}{2}} - \frac{3}{2} e^{\frac{t}{2}})} = \frac{-e^{\frac{t}{2}}}{-5e^{\frac{t}{2}}} = \frac{1}{5}$$

Para obtener $k_1(t)$ solo falta integrar:

$$\boxed{k_1(t) = \int \frac{1}{5}dt = \frac{t}{5} + C_1}$$

Ahora obtenemos $k_2'(t)$ teniendo en cuenta que el denominador es el mismo que en $k_1'(t)$:

$$k_2'(t) = \frac{e^{\frac{3t}{2}}e^{\frac{3t}{2}}}{-5e^{\frac{t}{2}}} = \frac{e^{\frac{6t}{2}}}{-5e^{\frac{t}{2}}} = \frac{-1}{5}e^{\frac{5t}{2}}$$

Integrando:

$$\boxed{k_2(t) = \int \frac{-1}{5}e^{\frac{5t}{2}}dt = \frac{-1}{5}\frac{2}{5}e^{\frac{5t}{2}} + C_1 = \frac{-2}{25}e^{\frac{5t}{2}} + C_2}$$

Por tanto, la solución buscada de la ecuación no homogénea es:

$$\boxed{x(t) = k_1(t)e^{\frac{3t}{2}} + k_2(t)e^{-t} = \left[\frac{t}{5} + C_1\right]e^{\frac{3t}{2}} + \left[\frac{-2}{25}e^{\frac{5t}{2}} + C_2\right]e^{-t}}$$

Ejercicio 2 Llamamos x(t) al número de conejos en cada instante t e y(t) a la población de zorros en t. Entonces el sistema de ecuaciones diferenciales que define la situación planteada es:

$x'(t)=5x(t)-10$

$y'(t)=3x(t)+2y(t)$

que escrito de forma matricial será :

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvemos primero el sistema asociado homogéneo que sesulta de eliminar el vector F(t) de los términos independientes:

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

Para calcular el polinomio característico hacemos el determinante de la matriz $A-\lambda I$:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(2-\lambda)$$

Si igualamos el polinomio característico a cero y resolvemos obtenemos:

$$(5-\lambda)(2-\lambda)=0 \Rightarrow \lambda=5, \lambda=2$$

Estos valores de λ son los valores propios de la matriz. Para cada valor propio debo obtener vectores propios linealmente independientes:

Para $\lambda=5$: busco vectores $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ que cumplan [A-5I] $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ =0, es decir:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como la primera ecuación es de ceros, solo obtenemos:

$3x-3y=0 \Rightarrow 3x=3y$

Tengo una ecuación y dos incógnitas, así que necesito asignar un parámetro:

Sea x= α $\Rightarrow$ y= α Y por tanto si doy al parámetro el valor 1 (por ejemplo) obtengo el vector propio :

v= $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Para $\lambda = 2$: Busco vector $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ que cumpla [A-2I] $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ =0, es decir:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como la matriz tiene dos filas iguales, solo obtenemos la ecuación:

3x=0 $\Rightarrow$ x=0

Y al igual que antes tenemos dos incógnitas pero sólo una ecuación. Por tanto tenemos que asignar un parámetro, que en este caso debe ser para la variable y:

y= α

Si damos un valor al parámetro obtenemos un vector propio. Así, si por ejemplo

$\alpha = 1 \Rightarrow v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Tenemos que la solución general de la homogénea es:

$$x(t)= Ae^{5t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + Be^{2t}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} e^{5t} \\ e^{5t} \end{bmatrix} + B\begin{bmatrix} 0 \\ e^{2t} \end{bmatrix}$$

Para resolver la ecuación no homogénea recordamos que esta solución era de la forma:

x(t)=G(T)C(t)

donde G(t) es la matriz cuyas columnas son las columnas de la solución general de la homogénea:

$$G(t)=\begin{bmatrix} e^{5t} & 0 \\ e^{5t} & e^{2t} \end{bmatrix}$$

Y C(t) corresponde a la siguiente expresión:

$$C(t)=\int G^{-1}(t)F(t)dt + C$$

Así, para obtener C(t) hay que calcular la inversa de la matriz G(t), después multiplicar por la matriz columna de los términos independientes F(t) y por último integrar.

Sabemos que $G^{-1}(t)=\frac{1}{|G(t)|}((Adj(G(t))^T)$

$$|G(t)| = e^{5t}e^{2t} - 0 = e^{7t}$$

$$Adj(G(t)) = \begin{bmatrix} e^{2t} & -e^{5t} \\ 0 & e^{5t} \end{bmatrix} \Rightarrow G^{-1}(t) = \frac{1}{e^{7t}}\begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ -e^{5t} & e^{5t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-5t} & 0 \\ -e^{-2t} & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Si multiplicamos ahora por el vector columna F(t):

$$\Rightarrow G^{-1}(t)F(t) = \begin{bmatrix} e^{-5t} & 0 \\ -e^{-2t} & e^{-2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -10 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10e^{-5t} \\ 10e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Integrando el vector obtenido (es decir, integrando todas sus componentes), obtenemos C(t):

$$\int -10e^{-5t}dt = \frac{-10}{-5}e^{-5t} + C_1 = 2e^{-5t} + C_1$$

$$\int 10e^{-2t}dt = \frac{10}{-2}e^{-2t} + C_2 = -5e^{-2t} + C_2$$

De esto obtenemos que

$C(t)=\begin{bmatrix} 2e^{-5t}+C_1 \\ -5e^{-2t}+C_2 \end{bmatrix}$, y por tanto la solución buscada x(t) es:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e^{5t} & 0 \\ e^{5t} & e^{2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2e^{-5t}+C_1 \\ -5e^{-2t}+C_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e^{5t}(2e^{-5t}+C_1) \\ e^{5t}(2e^{-5t}+C_1)+e^{2t}(-5e^{-2t}+C_2) \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} 2+C_1e^{5t} \\ 2+C_1e^{5t}-5+C_2e^{2t} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2+C_1e^{5t} \\ -3+C_1e^{5t}+C_2e^{2t} \end{bmatrix}$$

Solo falta encontrar los valores de C_1 y C_2, para lo cual imponemos las condiciones iniciales:

x(0)=1000, y(0)=100, y entonces:
x(0)= $2+C_1e^0=2+C_1=1000 \Rightarrow C_1=998$

y(0)= $-3+C_1e^0+C_2e^0=-3+998+C_2=100 \Rightarrow C_2=-901$

Así, $\boxed{x(t)=2+998e^{5t}\ ,\ y(t)=-3+998e^{5t}-901e^{2t}}$

Ejercicio 3 Llamamos x_n a la cantidad de champiñones que hay en la colonia en el año n.
Entonces la ecuación en diferencias que se plantea es:

$$x_{n+2} = 2x_{n+1} + \frac{45}{4}x_n - 20 \Rightarrow$$

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} - \frac{45}{4}x_n = -20$$

Es una ecuación en diferencias lineal de segundo grado y no homogénea.

Para resolverla, consideramos primero la homogénea asociada:

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} - \frac{45}{4}x_n = 0$$

cuya ecuación característica asociada es:

$$\lambda^2 - 2\lambda - \frac{45}{4} = 0$$

Al resolverla se obtienen los valores $\lambda_1 = \frac{3}{2}$ y $\lambda_2 = \frac{-5}{2}$

Entonces la ecuación general de la ecuación es de la forma:

$$x_n = k_n\left(\frac{3}{2}\right)^n + l_n\left(\frac{-5}{2}\right)^n$$

donde:

$$k_n = k_0 + \frac{1}{\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2)}\left[f(0) + \frac{f(1)}{\lambda_1} + \frac{f(2)}{(\lambda_1)^2} + \ldots + \frac{f(n-1)}{(\lambda_1)^{n-1}}\right]$$

$$l_n = l_0 + \frac{1}{\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)}\left[f(0) + \frac{f(1)}{\lambda_2} + \frac{f(2)}{(\lambda_2)^2} + \ldots + \frac{f(n-1)}{(\lambda_2)^{n-1}}\right]$$

Sustituyendo los valores $\lambda_1 = \frac{3}{2}$ y $\lambda_2 = \frac{-5}{2}$ y f(n)=-20:

$$k_n = k_0 + \frac{1}{\frac{3}{2}(\frac{3}{2}+\frac{5}{2})}\left[-20 + \frac{-20}{\frac{3}{2}} + \frac{-20}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} + \ldots + \frac{-20}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}}\right] = k_0 + \frac{1}{6}(-20)\left[1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right]$$

$$l_n = l_0 + \frac{1}{\frac{-5}{2}(\frac{-5}{2}-\frac{3}{2})}\left[-20 + \frac{-20}{\left(\frac{-5}{2}\right)} + \frac{-20}{\left(\frac{-5}{2}\right)^2} + \ldots + \frac{-20}{\left(\frac{-5}{2}\right)^{n-1}}\right]$$

$$= \frac{1}{10}(-20)\left[\frac{-2}{5} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \ldots + (-1)^{n-1}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}\right]$$

k_0 y l_0 son constantes que se obtienen aplicando los valores iniciales

$$x_0 = k_0\left(\frac{3}{2}\right)^0 + l_0\left(\frac{-5}{2}\right)^0 = k_0 + l_0 = 1000$$

$$x_1 = \left(k_0 - \frac{20}{6}\right)\left(\frac{3}{2}\right)^1 + (l_0 - 2)\left(\frac{-5}{2}\right)^1 = \frac{3}{2}k_0 - 5 - \frac{5}{2}l_0 + 5 = 1100$$

El sistema que se obtiene, tras arreglas la segunda ecuación es:

$$k_0 + l_0 = 1000$$

$$3k_0 - 5l_0 = 2200$$

Al resolver el sistema se obtienen los valores:

k_0=992, l_0=8

Que al sustituirlos en su lugar se obtiene la solución a la ecuación en diferencias buscada.

Fuente: enunciados correspondientes a exámenes de diferentes años de la Universidad de Valencia.