MODELO de EXAMEN

MÉTODOS MATEMÁTICOS III

(2º FÍSICA)

1. Utilizando métodos de variable compleja, calcular el valor de la integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\pi x/4)}{x^4-16}\,dx$$

2. Resolver la ecuación diferencial $y''-2y'-3y=e^{3x}$ con las c. i. $y(0)=y'(0)=0$

3. Hallar la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\left.\begin{array}{l} x'(t)=x(t)+z(t) \\ y'(t)=y(t) \\ z'(t)=x(t)+z(t) \end{array}\right\}$$

4. Resolver en serie de potencias alrededor de $x=0$ la ecuación:

$$(x^2-1)y''-2y=0$$

Problema 1

Tener en cuenta que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\pi x/4)}{x^4-16}dx = \mathrm{Re}\left(\oint \frac{e^{i\pi z/4}}{z^4-16}dz\right)$

Obtenemos las singularidades de $R(z) = \frac{1}{z^4-16}$

$$z^4-16=0 \;\Rightarrow\; (z^2-4)(z^2+4)=0 \;\Rightarrow\; z=\pm 2,\ \pm 2i \text{ polos simples}$$

Integral de $f(z)=\frac{e^{i\pi z/4}}{z^4-16}$ con polos en el camino:

$$\oint f = P\int_{-\infty}^{+\infty} f + \int_{C_\varepsilon} f + \int_{C_{\varepsilon'}} f + \int_{C_R} f$$

con $\oint f = 2\pi i\,\mathrm{Res}(f,2i)$; $\int_{C_\varepsilon} f = -\pi i\,\mathrm{Res}(f,2)$; $\int_{C_{\varepsilon'}} f = -\pi i\,\mathrm{Res}(f,-2)$

y $\int_{C_R} f = 0$ ya que $\lim_{x\to\infty} R(x)=0$.

Calculamos los residuos:

$$\mathrm{Res}(f,2i) = \lim_{z\to 2i}(z-2i)\frac{e^{i\pi z/4}}{(z^2-4)(z+2i)(z-2i)} = \frac{e^{-\pi/2}}{-8\cdot 4i} = \frac{e^{-\pi/2}}{32}i$$

$$\mathrm{Res}(f,2) = \lim_{z\to 2}(z-2)\frac{e^{i\pi z/4}}{(z^2+4)(z+2)(z-2)} = \frac{e^{i\pi/2}}{8\cdot 4} = \frac{1}{32}i$$

$$\mathrm{Res}(f,-2) = \lim_{z\to -2}(z+2)\frac{e^{i\pi z/4}}{(z^2+4)(z+2)(z-2)} = \frac{e^{-i\pi/2}}{8\cdot(-4)} = \frac{1}{32}i$$

Por tanto,

$$P\int_{-\infty}^{+\infty} f = \oint f - \int_{C_\varepsilon} f - \int_{C_{\varepsilon'}} f - \int_{C_R} f = 2\pi i\,\mathrm{Res}(f,2i) + \pi i\,\mathrm{Res}(f,2) + \pi i\,\mathrm{Res}(f,-2) =$$

$$= -\frac{2\pi}{32}e^{-\pi/2} - \frac{\pi}{32} - \frac{\pi}{32} = -\frac{\pi}{16}\left(1+e^{-\pi/2}\right)$$

Problema 2

La EDO $y''-2y'-3y=e^{3x}$ es lineal completa de 2º orden.

- EDOL homogénea: $y''-2y'-3y=0$

  ecuación característica: $\lambda^2-2\lambda-3=0 \Rightarrow \begin{cases}\lambda_1=3 & \Rightarrow & y_1(x)=e^{3x} \\ \lambda_2=-1 & \Rightarrow & y_2(x)=e^{-x}\end{cases}$ l.i.

  solución general de la homogénea: $y_h(x)=A\,e^{3x}+B\,e^{-x}$

- Solución particular de la EDOL completa:

$$y_p=C\,x\,e^{3x} \quad y_p'=C\,e^{3x}(1+3x) \quad y_p''=C\,e^{3x}(6+9x)$$

$$y_p''-2y_p'-3y_p=e^{3x} \quad\Rightarrow\quad C\,e^{3x}(6+9x)-2C\,e^{3x}(1+3x)-3C\,x\,e^{3x}=e^{3x} \quad\Rightarrow\quad C=\frac{1}{4}$$

- Solución general de la EDOL completa: $y(x)=A\,e^{3x}+B\,e^{-x}+\frac{1}{4}xe^{3x}$

- Condiciones iniciales:

$$\left.\begin{array}{l}0=y(0)=A+B \\ 0=y'(0)=3A-B+\frac{1}{4}\end{array}\right\} \Rightarrow A=-\frac{1}{16} \;,\; B=\frac{1}{16}$$

- Solución:

$$y(x)=\frac{1}{16}\left(e^{-x}+(4x-1)e^{3x}\right)$$

Problema 3

Sistema en forma matricial: $$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 - (1-\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda)\lambda = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \Rightarrow e^{0t} = 1 \\ \lambda_2 = 1 \Rightarrow e^{t} \\ \lambda_3 = 2 \Rightarrow e^{2t} \end{cases}$$

Vectores propios:

$$\lambda_1 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a+c=0 \\ b=0 \end{cases} \Rightarrow \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c=0 \\ a=0 \end{cases} \Rightarrow \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = 2 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -a+c=0 \\ b=0 \end{cases} \Rightarrow \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Solución General:

$$\vec{x}(t) = C_1\vec{u}_1 e^{0t} + C_2\vec{u}_2 e^{t} + C_3\vec{u}_3 e^{2t} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = C_1 + C_3 e^{2t} \\ y(t) = C_2 e^{t} \\ x(t) = -C_1 + C_3 e^{2t} \end{cases}$$

Problema 4

Como $x=0$ no es polo de $p(x)=0$ ni de $q(x)=\dfrac{2}{x^2-1}$, entonces $x=0$ es un punto ordinario de la ecuación diferencial $(x^2-1)y''-2y=0$.

Por tanto, existe una solución $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ con a_0 y a_1 arbitrarios. Además, el radio de convergencia de la serie será 1, que es la distancia a $x=\pm 1$, polos de $q(x)$.

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \Rightarrow \quad y'=\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \Rightarrow \quad y''=\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$$

Sustituyendo en la EDO:

$$(x^2-1)\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

Coeficiente de x^{n-2}:

$$-n(n-1)a_n \quad n=2,3,\ldots \quad \overset{n-2=k}{\Rightarrow} \quad -(k+2)(k+1)a_{k+2} \quad k=0,1,\ldots$$

Coeficiente de x^n:

$$n(n-1)a_n - 2a_n \quad n=0,1,\ldots$$

Sumando los coeficientes e igualando a cero:

$$n(n-1)a_n - 2a_n - (n+2)(n+1)a_{n+2} = 0 \qquad n=0,1,\ldots$$

$$(n+1)(n-2)a_n - (n+2)(n+1)a_{n+2} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_{n+2}=\frac{n-2}{n+2}a_n$$

n par:

$$a_2=-a_0 \qquad \text{y} \qquad a_{2k}=0 \quad k=0,1,\ldots$$

n impar:

$$a_{2k+1}=\frac{-a_1}{(2k+1)(2k-1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k-1}\right)a_1 \qquad k=1,2,\ldots$$

Así, tenemos

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k}x^{2k}+\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k+1}x^{2k+1}=a_0(1-x^2)+\frac{a_1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k-1}\right)x^{2k+1}$$

Las series que aparecen son sumables para $|x|<1$:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}=\int\frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right)dx=\int\sum_{k=0}^{\infty}x^{2k}dx=\int\sum_{k=0}^{\infty}\left(x^2\right)^k dx=\int\frac{1}{1-x^2}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)dx=\frac{1}{2}\left[-\log(1-x)+\log(1+x)\right]=\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{2k-1}=x^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k-1}}{2k-1}=x^2\sum_{r=-1}^{\infty}\frac{x^{2r+1}}{2r+1}=x^2\left(-x^{-1}+\sum_{r=0}^{\infty}\frac{x^{2r+1}}{2r+1}\right)=-x+\frac{x^2}{2}\log\frac{1+x}{1-x}$$

Con lo que

$$y(x)=a_0(1-x^2)+\frac{a_1}{2}\left[\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+x-\frac{x^2}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right]=$$

$$=a_0(1-x^2)+\frac{a_1}{2}\left[\frac{1}{2}(1-x^2)\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+x\right]=(1-x^2)\left[a_0+\frac{a_1}{4}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right]+\frac{a_1}{2}x$$

Por tanto, la solución general es

$$y(x)=2Bx+(1-x^2)\left[A+B\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right]$$

Fuente: enunciados correspondientes a exámenes de diferentes años de la Universidad de Valencia.