EXÁMEN DE MATEMÁTICA APLICADA
(RESUELTO)

FARMACIA

1. Calcula el área comprendida entre la función $y = x^3 - 4x$ y el eje de abcisas.

Solución:

1. Punto de corte entre las dos funciones:

(la segunda función es el eje de abcisas (OX) que corresponde con $y = 0$)

(denotaremos $y_1 = x^3 - 4x$, $y_2 = 0$)

$x^3 - 4x = 0$

$$x(x^2 - 4) = 0 \longrightarrow \begin{cases} (1) & x = 0 \\ (2) ... x^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

$(2) ... x^2 = 4 \longrightarrow x = \pm 2$

Por tanto, tengo 3 puntos de corte: $x = 0, x = 2, x = -2$

2.Miramos en cada intervalo entre dos puntos de corte qué función va por arriba y cuál por abajo.

__-2______________0______________2____

-en $[-2,0]$:

$y_1(-1) = 3 \longrightarrow$ arriba

$y_2(-1) = 0 \longrightarrow$ abajo

-en $[0,2]$:

$y_1(1) = -3 \longrightarrow$ abajo

$y_2(\frac{1}{2}) = 0 \longrightarrow$ arriba

3. Calculamos el área:

$$A=\int_{-2}^{0}(x^3-4x)-0\;dx+\int_0^2 0-(x^3-4x)\;dx=$$

$$=\int_{-2}^{0}x^3dx-\int_{-2}^{0}4xdx-\int_0^2 x^3dx+\int_0^2 4x\;dx=$$

$$=\frac{x^4}{4}\Big|_{-2}^{0}-4\frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{0}-\frac{x^4}{4}\Big|_0^2+4\frac{x^2}{2}\Big|_0^2=$$

$$=-\frac{(-2)^4}{4}+2(-2)^2-\frac{2^4}{4}+2*2^2=$$

$$=-4+8-4+8=8$$

2.Calcula las derivadas parciales en el punto $(\frac{\pi}{2},0)$ de la función $f(x,y)=x^3+sen(x+y^2)$

Solución:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2+\cos(x+y^2) \qquad \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(\frac{\pi}{2},0)=3*(\frac{\pi}{2})^2+\cos(\frac{\pi}{2})=\frac{3}{4}\pi^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=2y\cos(x+y^2) \qquad \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(\frac{\pi}{2},0)=0$$

3.En el cultivo de una bacteria, el crecimiento en un instante t viene dado por $3t$ más la cantidad de bacterias en dicho instante dividido por $t+1$. Si inicialmente hay un millón de bacterias, calular la cantidad que habrá al cabo de 2 horas.

Solución:

$y(t)$ =cantidad de bacterias

$y\prime(t)$ =velocidad de crecimiento del cultivo

t =tiempo (horas)

datos: $y(0) = 1.000.000$

ec.: $y'(t) = 3t + \frac{y(t)}{t+1} \longrightarrow y'(t) - \frac{1}{t+1}y(t) = 3t \longrightarrow$

(ec. lineal 1º orden, $y'(x) + p(x)y(x) = q(x)$)

1. Buscamos la solución general de la acuación:

fórmula: $y(t) = e^{-\int p(x)dx}(C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx)$

$y(t) = e^{-\int -\frac{1}{t+1}dx}(C + \int 3te^{\int -\frac{1}{t+1}dx}dx) =$

$= e^{\ln(t+1)}(C + \int 3te^{-\ln(t+1)}dx) =$

$= (t+1)(C + \int 3te^{\ln(t+1)^{-1}}dx) =$

$= (t+1)(C + \int 3\frac{t}{t+1}dx) =$ (int.. racional; dividimos t entre $t+1$)

$= (t+1)[C + 3(\int 1 - \frac{1}{t+1}dx)] =$

$= (t+1)[C + 3(t - \ln(t+1))] =$

$= (t+1)[C + 3t - 3\ln(t+1)] \longrightarrow$solución general

2.Sustituimos las condiciones iniciales en la ecuación diferencial para obtener el valor de las constantes:

- $y(0) = 1.000.000$:

$1.000.000 = C$

3.Sustituimos los valores de las ctes en la solución general para obtener la solución particular:

$$y(t) = (t+1)[1.000.000 + 3t - 3\ln(t+1)] \longrightarrow \text{solución particular}$$

4. Calculamos $y(2)$:

$$y(2) = (2+1)[1.000.000 + 3*2 - 3\ln(2+1)] =$$

$$= 3.000.018 - 9\ln(3) \approx 3.000.008'11 \text{ bacterias}$$

4.El 55% de los habitantes de un cierto país son mujeres. Se sabe que el 45% de los hombres son fumadores mientras que sólo fuma el 20% de las mujeres. Calcular la probabilidad de que una persona elegida al azar sea fumadora. Sabiendo que el individuo es fumador, ¿cuál es la probabilidad de que sea hombre?

Solución:

H = hombres$\longrightarrow$ $\overline{H}$ =mujeres
F = fumador

$P(\overline{H}) = 0'55$

$P(F \mid H) = 0'45$

$P(F \mid \overline{H}) = 0'2$

1.Probabilidad de que una persona elegida al azar sea fumadora :

(teorema de la probabilidad total)

$$P(F) = P(F \mid H)P(H) + P(F \mid \overline{H})P(\overline{H}) =$$

$$= 0'45(1 - P(\overline{H})) + 0'2 * 0'55 =$$

$$= 0'45(1 - P(\overline{H})) + 0'2 * 0'55 =$$

$$= 0'45 * 0'45 + 0'2 * 0'55 = 0'3125$$

2.Probabilidad de que sea hombre sabiendo que es fumador:

(teorema de Bayes)

$$P(H \mid F) = \frac{P(F|H)P(H)}{P(F)} =$$

$$= \frac{0'45 * 0'45}{0'3125} =$$

$$= \frac{0'2025}{0'3125} = 0'648$$

5.En una farmacia sirven un pedido con 2000 frascos de penicilina. La probabilidad de que un frasco se rompa en el transporte es de 0.002. Calcular la probabilidad de que:

a) haya exactamente uno roto
b) haya al menos 3 rotos
c) haya a lo sumo 4 rotos

Solución:

$n = 2000$
$p = 0'002$

$X = \text{n}^{\text{o}}$ de frascos rotos $\sim P_o(\lambda) \longrightarrow$ (n es muy grande y p muy pequeña)
$\lambda = np = 2000 * 0'002 = 4 \quad \longrightarrow X \sim P_o(4)$

a) una rota:

$P(X = 1) = 0'0733$

b) al menos 3 rotas:

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X \prec 3) =$$

$$= 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)) =$$

$$....= 1 - (0'0183 + 0'0733 + 0'1465) =$$

$$= 0'7619$$

c) a lo sumo 4 rotas:

$$P(X \leq 4) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) =$$

$$= 0'0183 + 0'0733 + 0'1465 + 0'1954 + 0'1954 = 0'6289$$

Fuente: enunciados correspondientes a exámenes de diferentes años de la Universidad de Valencia.